前　言

本教材面向机械工程专业的大学本科学生和机械工程领域的专业技术人员。旨在使学生在已经具备的大学数学、物理、力学知识的基础上，掌握流体流动与传热问题的基础知识，并能在所学理论的基础上，进一步结合工程实际，学会正确处理和解决机械制造工程中所遇到的流体流动与传热问题。

21世纪的机械工程专业培养的人才，不仅需要掌握现代计算机技术与应用网络技能，还必须掌握所从事专业的基础知识。随着机械工程专业的快速发展，无论是在新材料研制、冷加工、热加工领域，还是在先进制造技术、微细精密加工制造、自动化控制技术领域，流动与传热问题的正确解决，都成为至关重要的技术关键。实际上，在机械工程各专业的科学研究、加工制造和工艺、设备运行及生产安全等领域都不可避免涉及热量传递和流体流动的有关科学问题。随着现代科学技术的发展，从航天飞行器的制造运行到微电子器件的加工工艺，在机械工程涉及的每一个领域，人们比以往任何时候都更加关注机械加工和运行过程中的安全与效率，而这些都与热量传递和流体流动密切相关。《传热学与流体力学基础》这门课程就是按照上述实际需要开设的。多年来，我国高校机械工程类各专业急需一本能满足《传热学与流体力学基础》教学的教材。但由于种种原因，至今尚未见到这类教材。为了使《传热学与流体力学基础》教材适用范围扩大到全部机械工程类专业，编者在多年来从事传热学、流体力学课程教学的基础上，按照国家教育部教学要求，参考上海交通大学机械与动力工程学院与美国密歇根大学联合办学的该课程类似教材，以及国内外同类教材的优秀内容，自立系统编写此书。

《传热学与流体力学基础》课程属于技术基础课。它是学生学习专业课程的重要基础。本教材正是基于上述认识，在使用前人教材的基础上，对本课程内容进行了较大变动。首先，将流体力学的基础理论知识编入教材，并根据学生认知规律增加了工程应用内容。在传热学理论部分，结合编者30余年的传热学教学经验，以导热、对流、热辐射三种热量传递形式为主线，分别对它们的传递规律、计算方法进行讲解，使学生建立明确的概念。最后结合工程实际，教会学生进行复合换热方面的计算。根据实际需要，对数值计算只在有关章节作简单介绍。囿于篇幅限制和教材本身要求，更具体的内容需要学生进入研究生阶段深造时在专业课中学习。

流体力学基础的主要内容是按照教学要求，重点讲授流体基本物理性质、输运性质、流体的平衡特性与涉及热量传递时的流体动力学基础知识，特别是与对流换热微分方程组建立有关的流体力学基础。本书共分七章。第1章为绪论；第2、3章为流体力学理论基础；第4章为导热的理论和计算（稳态、非稳态）；第5章为对流换热理论和计算（对流换热微分方程组、无量纲准则的建立、自然对流换热、强迫对流换热的计算）；第6章为辐射换热的理论和计算；第7章为传热过程和复合换热。在教材结构上，编者结合教学体会和课程特点，参照国外教材，进行了一些革新。将流体力学基础知识和热量传递的三种基本方式的基本定律和计算分独立章节集中讲解。

本教材反映了编者多年来从事工程热物理、多相流科学教学、科研实践的心得总结。自然科学的建立是以人类的实践活动为基础的，无论多么深奥的理论，追本溯源，一定来自实践。

本课程所涉及的流体力学与传热学都属于实验科学。而流体力学一直是机械动力工程专业公认的较难对付的课程，究其原因是流体运动的数学模型的建立和解析求解非常困难。仅对单相流体，至今 Navier-Stockes 方程的解法仍然没有获得突破。如果是多相流体再与传热问题耦合，其难度更大。近年来由于计算机技术与数据采集技术、数据处理方法的发展，流体力学包括多相流科学更加重视实验研究结果，并在此基础上提高数值计算的水平。有鉴于此，编者认为学好本课程的关键在于学生必须具有良好的高等数学与物理基础，在掌握好基本规律和基本方程的同时，要注重实验技能的训练。只有通过扎实正确的计算和实验，所获结果才对解决实际问题有用。

21 世纪的大学生具有开拓创新的精神和充分发展的广阔天地。《传热学与流体力学基础》课程对于机械工程专业的学生虽然只是大学专业教育的很小一部分，但无论他们今后在哪个工作岗位上，都离不开对热量传递与流体流动问题的解决。我们的教育方针是要学生学有所得，学有所用。本教材每章后都附有一定数量的习题或思考题，以备学生练习，培养分析问题、解决问题的能力。书后的附录及相关资料，可供学生和读者参考使用。

感谢上海交通大学教材编写委员会对本教材出版发行的支持，感谢机械与动力工程学院教务办苏永康老师对本教材的编写所给予的支持；特别感谢上海交通大学出版社及潘新编辑的辛勤劳动；作为编者的教学助教，博士研究生张华，直接参与了本教材第 4、5、6 章的编写、作图等工作，并为全书统一公式、符号等付出了大量辛勤的劳动；硕士研究生姚彦贵、唐琦琳、赵桂生都为教材计算机输入做了大量工作，在此一并表示感谢。编者才疏学浅，书中谬误不足之处在所难免，恳请使用本书的师生和读者批评指正。

王 经
2006 年于徐汇工程馆求是室

目　录

第1章 导 论

1.1 《传热学与流体力学基础》课程的研究对象及在机械工程领域中的应用

传热学是研究热量传递规律的科学。随着现代科学技术的飞速发展，在动力机械、能源、化工、冶金、建筑、机械制造、电子、生命科学、航空航天、农业及环境保护等领域，不断涌现出多种多样的热量传递问题，需要应用传热学解决。人类进入21世纪以来，世界各国成千上万的专家、学者、工程技术人员，在传热学的理论及强化、减弱热量传递的工程技术问题领域不倦地进行探索和研究，解决了人类衣食住行、上天入地的许多科学难题。同时也使得传热学的理论体系日趋完善，内容不断丰富，已经发展成为现代科学技术中充满活力和具有挑战性的重要技术基础学科。流体力学是研究物体的平衡和运动规律的科学。它研究流体流动的基本规律；研究流体绕过某种物体或通过某种通道时的速度分布、压强分布、能量损失及流体与固体的相互作用。由于流体在运动时具有连续变形的特性，因而它的运动规律比固体更为复杂。流体力学是动力机械与流体机械专业的极为重要的专业基础课程。

18世纪30年代开始的欧洲工业革命，生产力的发展为自然科学技术的发展开辟了广阔的道路。在大发展大变革的时代，许多杰出的科学家应运而生，他们的杰出贡献导致了各类学科的创立和发展。其中在传热学和流体力学这两门学科发展中，贡献最突出的当数导热理论的奠基人法国科学家傅里叶(J. B. J. Fourier)与流体力学理论的奠基人纳维(M. Navier)和斯托克斯(G. G. Stockes)。傅里叶于1807年在实验的基础上提出了求解偏微分方程的分离变量法及可以将解表示成一系列任意函数的概念，并于1822年发表他的著名论著"热的解析理论"，成功地创建了导热理论。他提出的导热定律即傅里叶定律正确地概括了实验结果；他依据导热定律和能量守恒定律推导的导热微分方程是导热问题正确的数学描述；他提出的采用无穷级数表示理论解的方法成为微分方程求解的新途径。1823年纳维提出了可用于不可压缩流体的流动方程，1845年斯托克斯将其进一步改进为纳维-斯托克斯方程，奠定了描述流体流动基本方程的基础。随后，一系列科学家通过艰苦的探索，逐步建立了传热学与流体力学学科。两个世纪来在近代社会发展中不断出现的各种实际工程中，涌现出大量有关流体力学和传热学的问题，促使科技工作者及专家学者寻求解决问题的途径和方法。在计算机技术尚未发展成熟的时代，面对数学上无法求得理论解的复杂的纳维-斯托克斯方程和一系列换热微分方程，研究人员除了力求从数学理论上加以突破，另一有效途径就是通过实验来探求规律和寻求解决。因此，从传热学与流体力学发展完善的历史过程中，人们不仅可以看到数学、计算机的发展，更多地会看到实验科学与技术的发展。科学界公认传热学与流体力学都属于实验科学，科学工作者利用大量的实验结果丰富和发展了这两门学科，并总结出其中的科学规律，上升为基础理论。进入20世纪以来，数学与计算机科学的飞速发展，为传热学与流体力学的发展开辟了新的天地。大量传热学与流体力学问题的数值模拟成果不仅为解决许多技术关键立

下汗马功劳，也极大地丰富了这两门学科的内容。可以说，经典的传统的传热学与流体力学已经彻底、完全地焕发了现代的青春，成为现代科学技术中的重要学科领域。

《传热学与流体力学基础》课程是研究物体内部及其运动过程包括流体流动过程中的热量传递现象和规律的学科。当不同物体接触或物体发生运动时，只要有温差存在就不可避免地会出现热量的转移和交换。在机械工程领域，无论是固体还是液体的运动，都会出现涉及到安全、效率、能耗及设备性能的多种传热问题。借用著名德国物理学家普朗克的话："科学是内在的统一体，它被分解为单独的部门不是由于事物的本质，而是由于人类认识能力的局限性。"今天，我们很容易理解为机械工程专业的学生开设《传热学与流体力学基础》课程的目的，即通过学习为学生提供解决问题的基本理论、主要方法及途径。例如，在机械制造热加工专业中，工件的加热、冷却、熔化和凝固与热量传递的规律密切关联。要获得高质量的加工工件，必须正确掌握不同工况下，不同材料、不同几何形状工件内温度场的变化规律，需要工程师在进行加工前就了解和测算工件的温度场，并能控制加工过程中温度场的变化。具备扎实的传热学流体力学基础知识，是一名机械工程师保证工艺执行、提高产品质量和产量的关键。而对于热加工过程中液态金属的流动、冷却规律的掌握，对液压传动、气力输送、润滑中与流体力学问题相互交叉、耦合的问题的解决，更需要工程技术人员具备《传热学与流体力学基础》的基本知识。2003年挑战者号航天飞机在返回地球时发生机毁人亡的悲剧就是隔热层的脱落所导致。航天飞行器在重返地球时以当地音速的15～20倍的高速进入大气层，在航天器表面附近发生剧烈的摩擦生热现象，会使气流局部温度高达5000～15000K。为了保证航天器的安全飞行，有效冷却技术、高效隔热层涉及制造、以及航天器本身的材料热性能就成为关键技术。在生命科学领域，人工心脏、心肺机、助呼吸机等医疗器械的运行、设计都与传热学与流体力学知识息息相关。因为这些机械设备的运行过程中都必不可免地与流体流动和热量传递相关联，如果不考虑流体运动的规律，忽视温度的变化就会导致生命的危机！

本教材针对机械工程专业的特点，较系统地阐述传热学与流体力学的基础知识、基本理论，培养学生一定的分析和计算技能，为学习有关专业课程打好理论基础。更进一步的目的是希望通过本课程的学习，有助于学生开拓思路，扩大视野，为认识机械工程领域不断发展的新理论、新工艺创造条件。

运动是永恒的。凡是有温差的地方就有热量自发地从高温物体向低温物体传递或是从物体的高温部分传向低温部分。从这点出发，可以毫不夸张地说，《传热学与流体力学基础》课程是现代机械工程专业大学生的重要技术基础课程。本书编者衷心希望高校本(专)科学生通过这门课程的学习，在亲历了传热学与流体力学学科领域的探索历程后，能掩卷思考发出"不虚此行"的感想。

1.2 《传热学与流体力学基础》的理论基础知识简介

1.2.1 传热学的研究对象和方法

传热学是一门研究由温差引起的热量传递规律的科学。在自然界和人类生活中，凡是有温差存在，按照热力学第一定律，热量必然会从高温向低温传递。从传热学的发展史可知，18世纪30年代英国开始的工业革命促进了生产力的空前发展，促进了传热学的发展。本节将简

要讨论和介绍传热学的基本概念，即热量传递的三种基本方式：导热、对流、热辐射及热量在进行传递的过程中所遵循的基本规律。具体的数学描述、微分方程及其在工程中的应用和基本计算将在其后的章节中详细论述。

1. 导热和傅里叶定律

物体各部分之间不发生相对位移时，依靠分子、原子及自由电子等微观粒子的热运动而产生的热量传递称为导热，或热传导。

从微观角度看，物质的不同相态，即气体、液体、固体（导电固体和不导电固体）的导热机理各不相同。在气体中，导热是气体分子不规则热运动时相互碰撞的结果。气体温度越高，其分子的运动动能越大，不同能量水平的分子相互碰撞的结果使热量从高温处传到低温处。在导电固体中，相当多的自由电子在晶格之间像气体分子那样，通过相互碰撞传递热量。在不导电固体中，热量传递是通过晶格结构（晶格结构的振动又被称为弹性波）的振动，即原子、分子在其平衡位置附近的振动来实现的。而对于液体的导热机理目前学术界尚未获得完全统一的认识。一种观点认为液体中导热的原因类似于气体分子的相互碰撞，只是液体分子间的距离较小，分子间的作用力对碰撞过程的影响远大于在气体分子间的作用力对碰撞过程的影响。另一种观点认为液体中导热的原因类似于非导电固体，主要依靠弹性波的作用。关于导热的微观机理可参考热物性学专著，不再赘述。本书以后的论述仅限于导热现象的宏观规律。

如前所述，通过众多科学家的实验及理论研究，导热现象所遵循的基本规律已经总结为傅里叶定律，其数学表达式为

$$Q = -\lambda A \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

傅里叶定律指出，导热热流量 Q 的大小取决于物体中沿导热热量传递方向上的温度变化率 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ 的大小、热量通过的物体面积 A 与表征材料导热能力的物性参数、热导率 λ。因此，研究导热首先必须研究物体中的温度分布，即物体的温度在时间和空间的分布函数、温度场和温度变化率。还必须研究材料的性质、导热物体的几何形状与尺度。

按照温度场是否随时间变化将导热问题分为两类：一类是温度场中温度的分布不随时间发生变化的导热，即稳态导热；另一类是温度场中温度的分布随时间发生变化的导热，即非稳态导热。

按照物体的温度分布发生变化所考虑的不同坐标数目，导热问题又可分为一维稳态（非稳态）导热、二维稳态（非稳态）导热和三维稳态（非稳态）导热。

物体导热热量与通过面积大小的关系，主要取决于物体的几何形状。物体导热性能的优劣取决于物体材料的热导率大小及其影响因素。热导率是一种物性参数，本书只从工程应用的角度进行论述，更深入地讨论可参考热物性学有关专著。上述问题即是本书其后的导热一章研究讨论的主要内容。

2. 对流换热与牛顿冷却公式

对流换热是指由于流体的宏观流动，各部分之间发生相对位移，冷热流体互相掺混所引起的热量传递过程。由于流体中的分子同时在进行着不规则的热运动，故对流一定伴随着导热现象。工程上感兴趣的是流体流经固体表面时，流体与固体表面之间的热量传递现象。本书仅讨论流体与固体表面之间的对流换热。

计算对流换热热量 Q 的基本计算公式是牛顿冷却公式。通过面积为 A 的接触面的换热量数学表达式为

$$Q = hA\,\Delta t$$

对于单位面积的单位热流密度有：

$$q = h\,\Delta t$$

式中，Δt 为固体表面与流体的温差；比例系数 h 称为表面传热系数。

表面传热系数的大小与换热过程中的许多因素有关。它不仅取决于流体的物性，包括密度、比热容、热导率、黏性系数等，还与换热表面的形状、大小，特别是流动的速度、形态有密切的关系。需要指出的是，牛顿冷却公式所表达的只是在知道表面传热系数后如何进行对流换热热量的计算，并没有揭示如何获得表面传热系数，及影响表面传热系数的种种复杂因素的具体关系式，它仅仅给出了表面传热系数的定义。因而，研究对流换热的根本任务是应用理论和实验的方法求得各种情况下的表面传热系数，最终计算对流换热热量。这也是本书对流换热一章研究讨论的主要内容。

3. 辐射换热与四次方定律

物体通过电磁波来传递能量的方式称为辐射。研究和实践表明，物体会因各种原因发出辐射能。而物体由热的原因产生的电磁波辐射发出的辐射能即为热辐射。

自然界中各个物体都不停地向空间发出热辐射，同时又不断地吸收其他物体发出的热辐射。这个辐射与吸收过程的综合结果就形成物体间以辐射方式进行热量传递的现象，这就是传递热量的三种基本方式之一，辐射换热。当物体与周围环境处于热平衡时，辐射换热量为零，但此时是动态平衡，辐射与吸收过程仍在不停地进行。

与导热、对流换热同样，辐射换热在许多工程热物理领域中具有重要的应用。但辐射换热与导热、对流换热有两个重要的不同特点。首先，辐射换热可以在真空中进行，具有强烈的方向性。而且在真空中辐射换热最有效。两个物体被真空隔开时，例如外层空间的太阳和地球之间，导热和对流换热都不会发生，热量传递只能以辐射换热的方式进行。其次，由于物体内部微观粒子的热运动状态发生改变时激发出来的电磁波，在被吸收后又转变为热能，表明热辐射过程能量形式发生了转变。辐射换热发生时不仅产生能量的转移，而且还伴随着能量形式的转换，即发射时从热能转换为辐射能，被吸收时又从辐射能转换为热能。

任何物体只要温度高于 0 K，就会不停地向周围空间发出热辐射。实验表明，物体的热辐射能力与温度有关，同一温度下不同物体的辐射与吸收的能力也大不相同。辐射能与温度和波长均有关。

为了表示热辐射的基本规律，提出了黑体的概念。黑体是指能吸收投入到其表面上的所有热辐射能的物体。它是一种科学假想的物体，现实中并不存在，但却可以人工制造出近似的人工黑体。人工黑体在相同温度的物体中，具有其辐射能力最大的属性。

基于对辐射换热上述规律的理论和实验研究，1879 年斯忒藩通过实验确立，1894 年玻尔兹曼从理论上证明了黑体在单位时间内发出的热辐射热量取决于其绝对温度的四次方，即著名的斯忒藩-玻尔兹曼定律（Stefan-Boltzmann Law），又称四次方定律：

$$E_b = \int_0^\infty E_{b\lambda}\,d\lambda = \int_0^\infty \frac{c_1\lambda^{-5}}{e^{c_2/(\lambda T)} - 1}\,d\lambda = \sigma T^4 \qquad E_b = C_b\left(\frac{T}{100}\right)^4 \text{W/m}^2$$

式中，$\sigma = 5.67\times10^{-8}$ W/(m^2 · K^4)，称为 Stefan-Boltzmann 常数。$C_b = 5.67$ W/(m^2 · K^4)，

称为黑体辐射系数，C_1，C_2 分别为第一，第二辐射常量。

傅里叶定律、牛顿冷却公式和斯忒藩-玻尔兹曼定律对稳态和非稳态传热过程都是适用的。对非稳态过程，所求温度都是瞬时值，其温度分布不仅与坐标有关，还是时间的函数。

上面对传热学的三种基本热量传递方式作了简单介绍。可以看出，它们各自遵循不同的规律，在计算方法上各有不同，本书在后面的章节将分别予以讨论和分析。

1.2.2 流体力学基本概念及简介

上一节简要介绍了传热学的研究对象与研究方法等基本概念，本节将对涉及到传热问题的有关流体力学的基本概念，主要是对流体的物理性质进行讨论和介绍，从而使读者对流体力学的研究对象和研究方法有基本的了解。

1. 流体

在常温常压下，物质可存在固态、液态和气态三种聚集状态（在高温和高压情况下，还有等离子态和超固态），它们分别为固体、液体和气体。液体和气体又合称为流体。固体和流体的表观差别是前者具有一定的形状，不易变形，而后者则无一定的形状，且易于变形，即具有一定的流动性。与固体及液体相比较，气体在受到压强或温度变化时，体积有较大的改变；液体通常存在自由表面，这是固体及气体所没有的。

物质所表现出来的这些外部宏观性质的差别是由其内部微观结构、分子热运动和分子间的作用力决定的。任何物质都是由大量分子构成。根据热动力学假设，分子处于永不停息的随机热运动和相互碰撞之中。同时各分子之间还存在一种相互作用力，当分子之间的距离较近时，作用力以吸引为主，其主要来源于分子间电偶极距（核外的电子云中心与核不重合而产生）所极化而引起的相互作用。当分子非常接近时，作用力以排斥为主，这是由于各分子外层电子云开始重叠而产生的排斥作用。

1mol 的任何物质，都包含有 $6.022\,136\,7\times10^{23}$ 个分子（阿伏加德罗常数）。在常温常压下的气体，1cm^3 体积中约含有 2.7×10^{19} 个分子，因而分子间的平均距离约为 3.3×10^{-7} cm（为分子线尺度的 10 倍）。液体的分子间平均距离则较小，约为 10^{-8} cm。固体则比液体更小些。因此，气体分子之间作用力很小，分子近似作自由无规则的运动，以致气体无一定的形状，易于压缩，并各向同性。固体由于分子间距离最小，作用力也就最大，分子几乎呈固定排列，形成远程有序晶格，成为各向异性的晶体。若晶格远程大于 $15\text{Å}=15\times10^{-8}$ cm 排列无序时，就是各向同性的非晶体。固体分子的热运动仅在其平衡位置附近做振荡，故固体具有一定的形状和体积。液体分子间的距离比固体的稍大（大 1/3 左右），因而作用力也仅比固体的稍小，其分子排列则与非晶体相似。因而液体有一定的体积，难于压缩，且各向同性。液体分子热振荡的振幅比固体稍大，且其平衡位置经常变动，在平衡位置上逗留的时间也长短不一，其平均逗留时间称定居时间 τ。τ 的长短取决于分子力的大小和分子无规则运动的强弱，分子力愈大，定居时间愈长。温度愈高，分子无规则运动也愈烈，平衡位置也愈易改变，即定居时间愈小。一般情况下，液体受外力的作用时间 t 比定居时间 τ 大得多（一般金属液体的定居时间约为 10^{-10} s），在这段时间内，液体将沿外力方向移动平衡位置，引起液体的流动，形成液体的易流动性。

物质三态在一定的条件下会相互转化，例如，每当温度改变到一定程度，分子热运动足以破坏某种特定相互作用形成的秩序时，物质的宏观状态就可能发生突变，形成另一种聚态，这就是所谓相变。相变时有两个显著现象发生，一是相变中发生体积变化。物质从固相转变为

液相时，体积变化约为10%，气相变为液相时，体积的变化则随温度而不同。相变时的另一现象是产生潜热，气化、溶解、升华时吸热，凝结、凝固、凝华时放热。表1.1为一些物质和元素的熔解热及气化热。

应当指出，有些物质，例如沥青（非晶体），其相变过程与水等物质是不同的。当温度升高时，固态沥青先是由硬变软，然后由稠变稀，最后才成为液体，固液两态无明显界限。对这种情况，有时就只能用黏度系数μ值来划分，当$\mu < 10^{14}$ Pa·s时，定为液态，当$\mu > 10^{14}$ Pa·s时，定为固态。

表1.1 一些物质的熔解热与气化热

物 质	正常熔点/K	熔解热/kJ·kg^{-1}	正常沸点/K	气化热/kJ·kg^{-1}
水 H_2O	273	334	373	2257.0
醋酸 CH_3COOH	290	196.7	391	406
苯 C_6H_6	279	126	353	393.9
氧 O_2	328	13.8	363	213.9
二氧化碳 CO_2	217	180.8	195（升华）	554.2（升华）
酒精 C_2H_2OH	159	109.3	351	837.2
氨 NH_3	195	351.6	240	1366.3
铁 Fe	2081	314.0	3296	6279
硫 S	659	39.1	991	287.2

一般认为，物质形成三态是分子间相互作用的有序倾向及分子热运动的无序倾向共同作用的结果。固体分子间相互作用力较强，无规则运动较弱，有固定的形状和体积，不易变形和压缩；气体分子间作用力较弱，无规则运动剧烈，无固定形状和体积，易于流动和压缩；液体特征介于固体和气体之间，有一定的体积，但无固定的形状，易变形，不易压缩。其主宰因素复杂，至今尚未有一套完整的液体物性理论。

2. 流体的连续介质假设

流体力学研究流体的宏观运动，不直接研究流体物质粒子本身，而是从这些物质现象导出的一种模型，即连续介质模型。连续介质模型认为（假设）物质连续地无间隙地分布于物质所占有的整个空间，流体宏观物理量是空间点及时间的连续函数。

显然，物质的空间连续分布与物质本身的离散结构不同。那么，采用连续介质假设能否在某种意义下协调一致？此外物质宏观物理量如何确定，怎样与微观结构性质相联系？这是流体力学研究的一个最基本和最关键的问题。

研究流体的宏观运动虽也可以从微观（粒子理论）入手，并已获得部分成功。但一方面由于基本粒子规律本身尚未完全建立，即使依目前建立起来的规律能用于研究宏观运动，但每当发现基本粒子的一个更基本性质时，又得从头修改，而粒子理论的发展，原则上讲是无穷尽的；另一方面，用微观方法研究在数学上还有不少困难，而且由于物质结构的复杂性，研究中通常采用统计平均的方法，常使基本粒子的一些细节与物质宏观力学行为无直接关联，这就失去了从粒子根本规律出发的原来意义。因此，目前研究流体的宏观运动一般都采用宏观方法。

采用宏观方法研究流体的宏观运动，意味着不考虑单个粒子运动及其物理量，而是考虑大量粒子的平均运动及其统计特性，如速度、密度、温度等。显然，这里涉及到平均尺度的问题。即所选取的平均尺度既能反映物理量在空间各点处的不同分布状况，又不受分子随机运动的影

响。例如采用约为 10^{-3}cm 这一尺度作为一个长度尺度，在这一尺度相应的体积上对质点统计平均，可以确定密度这一宏观物理量(确定其他物理量也大致相仿)。

如果以分子间平均距离(对气体为 10^{-7}cm，对液体为 10^{-8}cm)或气体分子平均自由程(10^{-6}cm)作为粒子结构的一个长度尺度，记作 l，将空间密度等物理量有显著变化的尺度记作 L，则选用 α 作为流体宏观物理量统计平均合理的尺度应是：

$$l \ll \alpha \ll L$$

在大多数流体力学问题中，L 的尺度一般远大于 1mm，远比粒子结构的尺度 l 大得多，采用 $l \ll \alpha \ll L$ 这样的 α，意味着采用比粒子结构的尺度大得多的尺度，粒子结构的尺度微乎其微，可以忽略。这样可以不把物质看作为由离散粒子构成，而认为物质连续地占满其所有的空间，它们在所取尺度上具有物理量的统计平均值，并在空间上连续分布。这就是流体力学中所采用的一种假想化的介质，称为连续介质。

采用连续介质的概念研究流体的运动时，研究对象是质点，它是指一个流体微团。这个流体微团是比微观粒子结构尺度大得多、而比宏观特征尺度小得多的流体团。故质点包含着大量分子，但相比宏观特征尺度(例如密度、速度有显著变化的尺度)，它又很小。即它在微观上充分大，在宏观上充分小。质点具有的物理量是均匀的，它是其中大量粒子的统计平均值。连续介质就由这些连续分布着的质点组成。

引入连续介质这一概念来自数学上的要求，按照质点的概念，可以认为质点的物理量就是流体所在空间上空间点(同样，也是时间上)的连续函数。在物理上研究流体宏观运动的意义也是合理的。实验表明，基于连续介质假设而建立起来的流体力学理论是正确的。

在宏观意义下连续介质假设成立的条件是，所考虑的物理问题的尺度远大于粒子结构尺度。例如，飞机、船舶在空气、水中的运动，其特征长度例如船的长度，远大于粒子结构尺度。空气和水被认为是连续介质；血液在动脉中的流动(红血球的直径约为 8×10^{-4}cm，它在直径约0.5cm的动脉中流动)，血液就被当作连续介质；甚至当研究星系结构时，恒星间的距离约为 4×10^{18}cm，他们在半径约为 4×10^{22}cm 的银河系中运动，星系也是一种连续介质。

然而，在研究高空稀薄气体中的物体运动时，分子平均自由程很大，与物体特征长度尺度相比为同量阶，这时就不能视稀薄气体为连续介质。同样，血液在微血管(其直径可达 10^{-4}cm 量阶)中的运动，也不把血液当作连续介质。这是连续介质应用范围的限制。

3. 流体的可压缩性与热膨胀性

1) 流体的密度、相对密度和比体积

密度、相对密度与比体积是流体最基本的物理量。

(1) 流体密度 ρ 是流体中某空间点上单位体积的平均质量，即

$$\rho = \lim_{\Delta_\tau \to \Delta_{\tau_0}} \frac{\Delta m}{\Delta \tau}$$

上式中的 Δ_{τ_0} 宏观上取得足够小，而微观上又足够大。为了数学处理的方便，通常将上式写为

$$\rho(x,y,z,t) = \lim_{\Delta_\tau \to \Delta_{\tau_0}} \frac{\Delta m}{\Delta \tau} = \frac{dm}{d\tau}$$

密度是空间位置及时间的函数，其单位为 kg/m³。

已知密度 ρ，流体的微体积元 $d\tau$ 内的质量应为 $dm=\rho d\tau$，而体积 τ 内的质量应为 $m=\int_\tau \rho d\tau$。

(2) 流体的相对密度。相对密度是流体的质量与同体积水在4℃时的质量之比，或是该流体的密度与4℃水的密度之比，以 δ 表示，

$$\delta = \frac{\rho}{\rho_{4℃水}}$$

显然，相对密度是量纲为1的量。

(3) 流体比体积。比体积是密度的倒数，即单位质量流体所占有的体积。以 v 表示：

$$v = \frac{1}{\rho}$$

其单位为 m^3/kg。表1.2是几种常见流体的密度。

表1.2　常用流体的密度

流体名称	温度/℃	密度/$kg \cdot m^{-3}$	流体名称	温度/℃	密度/$kg \cdot m^{-3}$
二氧化碳	300	1.773	乙二醇	300	1111.4
空气	250	1.3947	氟里昂	280	1374.4
	300	1.1614	润滑油	300	884.1
氧气	300	1.284	甘油	300	1259.9
氮气	300	1.1233	水银	300	13529
一氧化碳	300	1.1233	纯水	288	999.1
氦气	300	0.1625	纯水	278	1000.0
氢气	300	0.08078	水蒸气	400	0.5542

流体密度值除依流体的种类不同外，还取决于流体的压强和温度。当流体是多组分的混合物时，密度还是各种组分浓度的函数。例如，海水是水与各种溶解盐的混合物，海水密度常认为是压强、温度及盐度（盐度是单位质量海水中溶解盐的质量，以 ζ 表示）的函数：$\rho = \rho(p, T, \zeta)$；大气是干空气（干空气本身是一种混合物，但常可把它认为是单一组分气体）与水汽的混合物，大气密度是压强、温度及比湿（单位质量空气中含有的水汽质量，称为比湿，以 q 表示）的函数：$\rho = \rho(p, T, q)$。

2) 流体的可压缩性与热膨胀性

流体的可压缩性是指流体在外力作用下，其体积或密度可以改变的性质；流体的热膨胀性则是流体在温度改变时其体积或密度可以改变的性质。

从物理学可知，对单一组分的流体，如水、空气等，其密度随压强与温度而改变，密度的改变量为

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p}dp + \frac{\partial \rho}{\partial T}dT = p\gamma_T dp - \rho\beta dT$$

其中，$\gamma_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T$ 称为等温压缩率，$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ 称为热膨胀系数。

等温压缩率是衡量流体可压缩性的物理量，它表示在一定温度下压强增加一个单位时，流体密度的相对增加率。由于比体积 v 为密度 ρ 的倒数：$v\rho = 1$，因此

$$\gamma_T = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

该式表示，等温压缩率表示在一定温度下压强增加一个单位时流体体积的相对缩小率。

等温压缩率 γ_T 的倒数为体积弹性模量 E：

$$E=\frac{1}{\gamma_T}=\rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T=-v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \tag{1-1}$$

它表示流体体积的相当变化所需的压强增量。表 1.3 是一些常见流体的等温压缩率 γ_T 及体积弹性模量 E 的值。

严格说来,实际流体都是可以压缩的,只是程度不同而已。但在流体力学中,为了处理问题的方便,常将压缩性很小的流体近似看作不可压缩流体;它的密度可看作为常数,即指同一流体的密度视为不变,否则就是可压缩流体。

表 1.3 一些常见流体的 γ_T 及 E 值

流 体	$\gamma_T/(\times10^{-11}\mathrm{m^2\cdot N^{-1}})$	$E/(\times10^9\mathrm{N\cdot m^{-2}})$
二氧化碳	64	1.56
酒精	110	0.909
甘油	21	4.762
水银	3.7	27.03
水	49	2.04

热膨胀系数表示在一定压强下,温度增加 1K 时流体密度的相对减小率。与等温压缩率类似,它也可写为

$$\beta=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \tag{1-2}$$

它表示在一定压强下,温度增加 1K 时流体体积的相对增加率。表 1.4 给出一些液体的热膨胀系数。

表 1.4 一些液体的热膨胀系数

液 体	温度/K	$\beta\cdot10^3/\mathrm{K^{-1}}$
润滑油	300	0.7
乙二醇	300	0.65
甘油	300	0.48
氟里昂	300	2.75
水银	300	0.181
饱和水	300	0.276

1.3 传热学和流体力学研究方法与单位制

1. *学习研究方法*

传热学和流体力学都是实验科学,必须坚持"实践是检验真理的唯一标准"的原则从事研究和学习,走进传热学和流体力学的世界。在学习前人通过实验总结出的规律性的理论的基础上,学会如何用基础理论知识分析研究实际工程中具体问题的方法和技巧,并最终解决实际工程中出现的各种不同类型的问题。学科的创新就是在此基础上去探求未知世界,发现新的规律和建立新的理论。

同机械工程专业的许多技术基础课一样,本课程需要学生具备扎实的数学、物理等基础知识,要善于把实际问题抽象为数学物理模型,不断从学习中提高分析问题、解决问题的能力。

课堂教学是学习的重要环节。必须在教师讲课的过程中紧跟老师的思维，积极思考，明确哪些是自己已经了解的，哪些问题还没听明白，并在课后进一步阅读教学参考书及独立完成作业，最终达到融会贯通、掌握知识。而能做到上述要求，关键是课前预习、独立完成作业并善于提问。

前已述及，传热学和流体力学都属于实验科学领域，研究和解决问题的方法可划分为实验、分析和数值计算三种。它们的主要步骤和优缺点可分别扼要地叙述如下：

1）实验方法

传热学和流体力学学科的建立和发展离不开实验。通过大量的各种实验，科学家对传热学和流体力学学科的发展做出了巨大的贡献。在当前高度发展的科技时代，离开实验方法，许多复杂的高技术领域问题，如航空航天、大型水利枢纽以及核工程等技术问题的解决，是不可能的。应用实验方法的主要步骤是：①对所给定的问题，具体分析确定其属于哪一种类型，并选择适当的理论基础；②根据所选理论基础，进行实验准备工作，包括模型的设计制造、实验系统的建立与设备仪器的选择使用等；③制定实验方案并进行实验；④整理和分析实验结果，并与其他方法或其他研究者的结果进行比较获得实验结论。

实验方法的优点是显而易见的。通过实验能够直接解决生产中的复杂问题，能通过直接的观察和对所采集的实验数据的分析和处理，发现所研究问题中的新现象和新规律。通过合理精确的实验所获得的结果具有绝对的权威性，可以作为检验其他方法是否正确的依据。但实验方法的缺点在于对不同情况、不同条件所作不同的实验，所获得结果只能限制在实验条件内，缺乏普适性。

2）分析方法

继实验方法之后出现的是分析方法，应用这种方法的主要步骤是：①建立简化的数学模型，即根据所给问题的特点，通过分析进行一定的假定和简化，推导建立该问题的方程组、初始条件与边界条件；②用分析方法求此简化后的初值问题或边值问题的分析解；③选取适当的算例，利用分析解进行具体计算；④将所得算例结果与用其他方法所得的相应结果进行比较，以检验简化模型的合理性。

分析方法的优点在于分析解明确地给出了各种物理与系统参量之间的变化关系，有较好的普适性。它的缺点则是限于数学求解的困难，所建立的方程组能获得的分析解的数量有限。同时在建立方程组时所提出的简化和假设条件也限制了所获结果的应用范围。

3）数值方法

20世纪中叶开始的计算机技术的发展，为数值计算方法的应用提供了极大的发展空间。数值计算方法的主要步骤是：①对分析方法建立的方程，初始条件和边界条件，进行必要的简化或改写；②选用适当的数值方法，对简化或改写的初值问题或边值问题进行离散化；③编制程序，选取算例，进行具体计算，并将所得结果绘制成图表求得最终结果。

数值计算方法的优点在于对分析法无法求解的一些问题，往往可以求得它们的数值解。随着计算机的速度与容量继续提高，计算方法不断改进，数值计算所起的作用将愈来愈大。但它仍是一种近似方法，其计算结果还必须与实验或其他精确结果进行比较。数值计算方法的缺点是对于复杂而又缺乏完善数学模型的问题，仍无能为力。

前已述及，实验结果是随着实验条件，包括相似性参数，模型布局等的改变而改变的。数值计算同样也对不同条件可获得不同数值结果，这与实验方法中的情况极为相似，称为数值实

验。但应注意实验和数值计算两者之间的本质差别并未因此而消失，即数值结果是建立在具有一定假设条件的方程之上的，而实验结果则直接来自物理的模拟。因此数值结果仍应受到实验结果的检验。如果在某一实验条件范围内，可以节省实验费用。但如果数值计算的问题情况未知，则应小心从事。因为数值计算缺乏自觉性，容易导致错误的结果。

上述简单表明了三种方法各有所长。在学习中应当注意如何掌握这些方法，以便在今后的实际应用中，综合其优点，取长补短以获得最好的研究成果。

2. 单位制

本书采用我国法定计量单位。它是以国际单位制单位为基础，适当增加一些其他单位构成的。国际单位制简称 SI。法定计量单位的基本单位与国际单位制相同，它们是长度、质量、时间、电流、热力学温度、物质的量及光强度共七个基本物理量的单位。单位名称及符号分别为米(m)、千克(kg)、秒(s)、安培(A)、开尔文(K)、摩尔(mol)及坎德拉(cd)。我国的法定计量单位与国际单位制一样，有很多优点，如各种不同形式的能量，诸如力学中的机械能、电学中的电能、热学中的热能等，均无例外地采用同一个单位——焦耳(J)，消除了其他单位制中不同种类能量单位间的换算。

鉴于现存工程单位制的资料在相当长的一段时期内仍有参考价值，因此有必要掌握工程单位制与我国法定计量单位间的换算。工程单位制以长度、时间、力作为基本量，并针对热科学问题补充了温度及热量作为基本量。这五个基本量的常用单位分别是 m，s，kg，℃及 kcal。在物理学等先修课中，我们已熟悉压力、动力黏度等物理量的换算，这里着重补充能量及与能量有关的一些单位换算的要点。

我国法定计量单位中，能量的单位为 J(1J＝1N・m)，功率的单位为 W(1W＝1J/s)，以及 kJ 和 kW。工程单位制中 1kcal 折合 4.186 8kJ。这样，传热学中经常遇到的 kcal/h 这一组合单位可做如下换算：

$$1\text{kcal/h}=\frac{4.1868\times10^{3}\text{J}}{3600\text{s}}=1.163\text{J/s}=1.163\text{W}$$

因此，工程单位制中包含 kcal/h 这一单位组合的物理量，如 Φ,q,λ,h,k 等各乘以 1.163 即换算成国际单位制中相应单位的值。注意在换算时，这些物理量所得的两种单位制的数值均属于同一数量级，且工程单位制单位的数值略大于国际单位制单位的数值。

本书中及工程热物理技术中常用的物理量的单位换算表列于附录。

习 题

1. 试查出下列四种材料的热导率量值范围：(1)金属；(2)固体绝缘材料；(3)液体；(4)气体。

2. 试用简练的语言说明导热、对流换热及辐射换热三种热传递方式之间的联系与区别。

3. 若有人提出热量无法在真空中传递，你如何回答？

4. 解释为何可以用流体微团的概念研究流体这种连续介质的运动和受力问题？

5. 为什么说流体力学和传热学都是实验科学？试举例说明实验对这两门科学发展的贡献。

6. 热导率、表面传热系数的单位各是什么？它们哪个是物性参数？哪个与过程有关？

第 2 章　流体的输运性质和数学描述方法

2.1　流体的输运性质

如果物质由于某种原因处于非平衡态，那么系统会通过某种机理，产生一种自发的过程，使之趋向一个新的平衡态。例如，当各层流体间速度不同时，通过动量传递使速度趋向均匀；当流体各处温度不均匀时，通过能量传递使温度趋向均匀；当流体各处密度不同时，通过质量传递使密度趋向均匀。流体这种由非平衡态转向平衡态时物理量的传递性质，统称为流体的输运性质。

从微观上看，流体的这种输运性质，是通过分子的热运动及分子间的相互碰撞发生的。分子在无规则运动中，将原来所在区域的流体宏观性质输运到另一区域，再通过分子的相互碰撞，交换、传递了各自的物理量，从而形成新的平衡态。

流体的输运性质主要指动量输运、能量输运和质量输运。从宏观上看，它们分别表现为黏滞现象、导热现象、扩散现象，并具有各自的宏观规律。

2.1.1　动量输运——黏滞现象

考虑平行于 x 轴的水平流动，当各层流体的速度不同时，任意两层流体之间将互施作用力以阻碍各层流体之间的相互运动，这种现象称为黏滞现象。

1687 年牛顿首先发表了他对剪切流动的实验结果，他的实验是在相距为 h 的平行平板之间充满黏性流体后进行的。下平板固定不动而使上平板在其自身平面内以等速 U 向右运动，则附于上下平板的流体质点其速度分别为 U 及 0。两平板间的速度分布如图 2.1 所示。

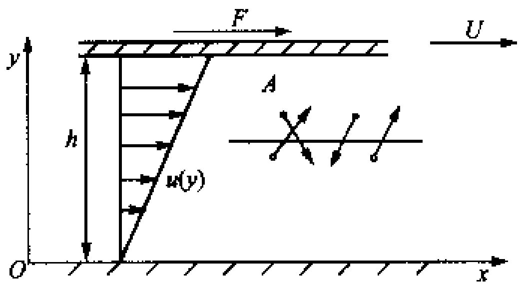


图 2.1　黏滞现象

实验指出，如果作用于上平板的外力为 F，则该力与速度 U 及平板面积 A 成正比，与平板间距 h 成反比，即

$$F=\mu\frac{U}{h}A \tag{2-1}$$

$$\text{或}\ \tau=\frac{F}{A}=\mu\frac{U}{h} \tag{2-2}$$

其中 U/h 是速度梯度。一般而言，当速度分布为 $u(y)$ 时，流体层 y 处 的剪切力

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{2-3}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ 为速度梯度，μ 是比例系数，称为黏度或动力黏度（又称黏度系数），其值随流体不同而

不同。这就是著名的一维黏性流动的牛顿黏性定律。

在国际单位制中应力的单位为帕斯卡(简称帕,Pa),即每平方米上受 1 牛顿力。速度梯度单位为 s^{-1},故 μ 的单位为 Pa·s 或 1 N·s/m^2,亦即 1kg/(m·s)。在 CGS 制中 μ 的单位为 g/(cm·s),又称泊,它们间关系为 1 Pa·s=10 泊。

1860 年 J. C. 麦克斯韦首先对黏性气体的牛顿公式给出了理论解释。根据气体分子动力学,气体分子的速度由平均速度与热运动速度两部分组成,前者是气体质点的宏观速度,而后者则是气体分子的微观随机运动速度。若相邻两层气体,以各自的宏观速度 u 运动时,由于分子的随机运动即分子的碰撞,而产生动量的交换,上层流体宏观运动速度大,交换中使上层流体减少动量,下层流体宏观运动速度小,交换中使下层流体增加动量,依动量定理,两层气体间就产生一对平行于运动速度方向的力,即剪切力。对上层流体,该力与运动速度方向相同,是一个帮助流体运动的力。这一对力是一种内摩擦力,或作用于流体的黏性力(图 2.1)。这也就是产生黏滞现象的原因。

液体的微观结构与气体不同,液体的黏度与分子在平衡位置附近的振动(或定居)时间有关。振动时间长即平衡位置的变换次数少,其流动性小,黏性就大;反之,其流动性大,黏性就小。通常液体的黏度较气体的大得多,而且黏度随温度的变化也与气体迥异。对于液体,温度升高时,分子间的间隙增大,吸引力减小,定居时间减小,黏度也减小。这与气体正好相反,气体温度增高,热运动加剧,动量交换加快,黏性增大。

通常情况下,压强对流体黏度的影响很小,但在高压作用下流体的黏度均随压强的增加而增加。

在流体力学中,除了用(动力)黏度 μ 外,还常用到运动黏度或动量扩散率 ν,它是黏度 μ 与流体密度 ρ 之比:

$$\nu = \mu/\rho$$

ν 的单位是 m^2/s。

表 2.1 是一些流体的黏度 μ 及运动黏度 ν 值。

表 2.1　一些流体的黏度 μ 及运动黏度 ν 值

流　体	温度/K	黏度 μ($\times 10^7$ N·s·m^{-2})	运动黏度 ν ($\times 10^6$ m^2·s^{-1})
空气	300	184.6	15.87
氨	300	101.5	14.7
二氧化碳	300	149	8.4
一氧化碳	300	175	15.6
氦	300	199	122
氢	300	89.6	111
氮	300	178.2	15.86
氧	300	207.2	16.14
水蒸气	400	134.4	24.25
润滑油	300	48.6$\times 10^5$	550
乙二醇	300	1.57$\times 10^5$	14.1
甘油	300	79.9$\times 10^5$	634
氟里昂	300	0.0254$\times 10^5$	0.195
水银	300	0.152 3$\times 10^5$	0.112 5

表 2.2 及表 2.3 为空气和饱和水随温度变化的黏度值。

实际流体都是有黏性的，但若流体的黏度很小，而且流场中速度梯度不大，那么，这时流场中出现的黏性力很小，可以将这种流体流动近似认为是无黏性流动。无黏性流体（流动）的概念虽然是假想的，但却能很清晰地揭示出许多流动的主要特性。因此，研究无黏性流动在流体力学基础理论中占有重要位置。

表 2.2　空气黏度随温度的变化

温度/K	$\mu(\times 10^{7}\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-2}})$
250	159.6
300	184.6
350	208.2
400	230.1
500	270.1
600	305.8
700	338.8
800	369.8

表 2.3　饱和水黏度随温度的变化

温度/K	$\mu_l(\times 10^{6}\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-2}})$
273.15	1750
300	855
310	695
320	577
330	489
340	420
350	365
360	324
370	289

还应指出，由实验所得的牛顿黏性定律并非对所有流体都成立。能满足这一定律的流体只是一些分子结构简单的流体，如空气、水等。实验表明，很多流体的切应力与剪切应变率之间不满足线性关系。通常将切应力与剪切应变率之间满足线性关系的流体称为牛顿流体，而把不满足这一关系的流体称为非牛顿流体。

非牛顿流体极为普遍，食品工业中的奶油、蜂蜜、蛋白、果酱；建筑材料中的沥青、水泥浆；大多数油类及润滑脂、高分子聚合物溶液、树胶；动物血液等均是非牛顿流体。对它们的利用、加工和输送，都必须涉及其性质，因此非牛顿流体力学近年来有较快发展。非牛顿流体流动如图 2.2 所示。

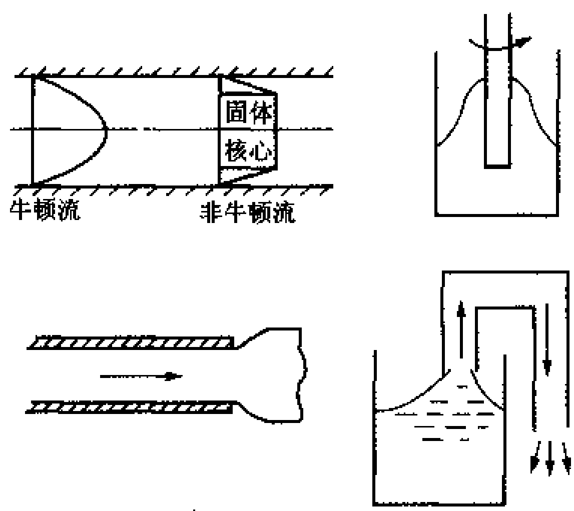


图 2.2　非牛顿流体流动

2.1.2 热能输运——热传导现象(略,见本书传热学部分)

2.1.3 质量输运——扩散现象

当流体的密度分布不均匀时,流体的质量就会从高密度区迁移到低密度区,这种现象称为扩散现象。它们又可分为两类,一类是在单组分流体中,由于其自身密度差所引起的扩散,称为自扩散;另一类是在两种组分的混合介质(如气体或液体与可溶固体、两不相混的液体等)中,由于各组分的各自密度差在另一组分中所引起的扩散,称为互扩散。一般说来,在解决实际问题中互扩散远较自扩散更为重要。下面仅对质量输运作一简介。

1. **自扩散**

当流体分子进行动量与热能交换的同时,也伴有质量的交换,因为质量输运的机理与动量和热能输运的机理完全相同。假定在流体中存在一密度分布 $\rho(y)$,其梯度为 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}y$,由于分子的热运动,流体将从上方迁移到下方,如图2.3所示,单位时间所输运的质量与截面积 A 和密度梯度 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}y$ 成正比,单位时间每单位面积上的输运

$$j = -D\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}y} \tag{2-4}$$

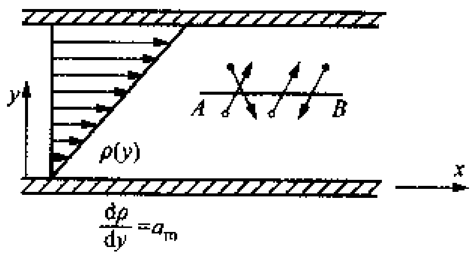


图2.3 扩散现象

其中 D 为自扩散系数,负号表示质量的流向与密度梯度方向相反。与黏度和热导率一样,可计算出

$$D = \frac{1}{3}cL \tag{2-5}$$

相比较后有 $\mu=\rho D$。根据更精确的计算,J. H. Jeans(琼斯)的理论给出 $\rho D/\mu=1.34$。S. 查普曼理论给出 $\rho D/\mu=1.336$。而实测的则在1.3～1.5之间。

2. **互扩散**

1855年,A. 菲克(Fick)首先发表了双组分混合物互扩散的实验结果。他考虑由组分A和B组成的混合物系统,各组分均由其各自的高密度区向低密度区扩散。为简便起见,假定组分B为均质介质,仅考虑组分A在组分B中的扩散。他的实验结果表明,组分A的定常扩散率与它的密度梯度和截面积成正比,或单位时间每单位面积的质量流量与密度梯度成正比,

$$j_{\mathrm{AB}} = -D_{\mathrm{AB}}\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}y} \tag{2-6}$$

其中 j_{AB} 和 D_{AB} 分别为组分A在组分B中每单位面积的质量流量及扩散系数,式(2-6)通常称为一维定常的第一菲克扩散定律。

当密度在空间呈三维不均匀分布时,介质的质量扩散为各向同性时,式(2-6)更一般的情况表示为每单位面积的质量流量矢量

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{AB}} = -D_{\mathrm{AB}}\nabla\rho_{\mathrm{A}} \tag{2-7}$$

其中 $\nabla\rho_{\mathrm{A}}$ 为组分A的密度梯度。

在国际单位制中,扩散系数的单位为 $\mathrm{m^2/s}$,它与黏度系数和热导率不同,它的大小依赖于压强、温度和混合物的成分。一般说来,液体的扩散系数较气体的小几个数量级。表2.4与表

2.5 是几种物质在空气和水中的扩散系数。

与传热现象类似，传质现象除了分子输运以外，还有对流传质，并且根据流动的性质分为受迫对流传质与自由对流传质。

表 2.4 几种物质在空气中的扩散系数

溶质	溶剂	温度/K	$D_{AB}/m^2\cdot s^{-1}$
水	空气	298	0.26×10^{-4}
二氧化碳	空气	298	0.16×10^{-4}
氧	空气	298	0.21×10^{-4}
丙酮	空气	273	0.11×10^{-4}
苯	空气	298	0.88×10^{-5}
萘	空气	300	0.62×10^{-5}

表 2.5 几种物质在水中的扩散系数

溶质	溶剂	温度/K	$D_{AB}/m^2\cdot s^{-1}$
食盐	水	288	1.1×10^{-9}
葡萄糖	水	298	0.69×10^{-9}
酒精	水	298	0.12×10^{-8}
甘油	水	298	0.94×10^{-9}

上述讨论表明，流体的动量、热能和质量三种输运性质，从微观的角度看，它们的形成机理是相似的，都是通过分子的热运动及分子的相互碰撞，输运了它们原先所在区域的宏观性质，从而使原先区域的状态不平衡渐渐趋向状态平衡。同时在宏观上具有类似的表达式，即

黏性 $\tau=\mu\dfrac{du}{dy}$ 牛顿定律

热传导 $q=-k\dfrac{dT}{dy}$ 傅里叶定律

扩散 $j_{AB}=-D_{AB}\dfrac{d\rho_A}{dy}$ 菲克第一定律

（每单位面积的动量、热量或质量流量＝常数×势梯度）。

这三种输运过程的另一共同点是它们均为不可逆过程，同时这些分子输运现象主要在层流流动中考虑，一旦流动为湍流，由于湍流输运远较分子输运强烈，分子输运常常予以忽略。

2.1.4 表面张力和毛细现象

液体表面具有一种不同于液体内部的特殊性质：即在液体内部相邻液体间的相互作用表现为压力；而在液体表面，界面液体间的相互作用表现为张力。由于张力的存在，引起弯曲液面内外出现压力差以及常见的毛细现象等。这些特性在讨论毛细波及毛细流等问题中是必须考虑的。

1. *表面张力*

许多现象表明，液体表面有自动收缩的趋势，例如，取一边可以自由滑动的矩形钢丝框架，将框架浸入肥皂液内片刻后取出，框架上就会形成一个肥皂膜。如沿自由滑动边不加外力，肥皂膜就将自动收缩，这表明肥皂膜上存在着张力。

设想在上述液面内画一截线，截线两边的液面存在着相互作用的力，此力与截线垂直并与

该处液面相切，这种力称为液体的表面张力。

若截线长为 L，则由实验表明，表面张力的大小与液面截线的长度 L 成正比，即

$$T = \sigma L \tag{2-8}$$

式中 σ 称为表面张力系数。式(2-8)表示液面上单位长度截线上的表面张力，其大小主要由物质种类决定，其单位为 $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$。表 2.6 是一些物质的表面张力系数值。表 2.7 是饱和水的表面张力系数随温度变化的情况。

表 2.6　一些液体的表面张力系数

液体	温度/K	$\sigma/(\times 10^{-3}\mathrm{N \cdot m^{-1}})$
水与空气	291	73
水银与空气	291	490
水银与水	293	472
酒精与空气	291	23
乙醚与空气	293	16.5
肥皂水与空气	293	40

表 2.7　饱和水的表面张力系数与温度的关系

温度/K	$\sigma/(\times 10^{-3}\mathrm{N \cdot m^{-1}})$
273	75.5
290	73.7
310	70.0
350	63.2
400	53.6

2. *弯曲液面下的压强差*

肥皂泡、水中的气泡、液滴以及固体与液体相接触的地方，液面都是弯曲的。在某些情形下可能是凸液面，如液滴、水银温度计中的水银面；而在另一些情形下可能是凹液面，如水中的气泡，细玻璃管中的水面等。由于表面张力的存在，液面内、外有一压强差，形成附加压强。在凸液面时，附加压强为正，即液面内的压强大于液面外的压强(常为大气压)；在凹液面时则反之，此附加压强可通过对液面的受力分析计算。如图 2.4，2.5 所示，设在任意弯曲的液面上取一点 O，作 ON 垂直于曲面，过 ON 作互相垂直的两平面，与曲面相交于两截线 A_1B_1 及 A_2B_2，并分别设 A_1B_1 及 A_2B_2 两截线的曲率半径为 $OC_1=R_1$，$OC_2=R_2$，再过点 O 液面作一微曲线四边形 $DEFG$。分析曲线四边形受力情况，略去重力，由表面张力及附加压强力取得平衡，从而有

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{2-9}$$

式(2-9)称为拉普拉斯公式。应注意，当曲率中心在液内时，相应曲率半径取正值；当曲率中心在液外时，相应曲率半径取负值。

若弯曲液面为球面时，$R_1=R_2=R$，从而 $\Delta p = 2\sigma/R$。当弯曲液面为柱面时，$R_1=R$，$R_2=\infty$，$\Delta p=\sigma/R$，若此柱面由 $\zeta=\zeta(x)$ 给出，则曲率半径 R 有关系式

$$\frac{1}{R} = \frac{\zeta_{xy}}{(1+\zeta_x{}^2)^{3/2}} \tag{2-10}$$

式中下标表示取导数。

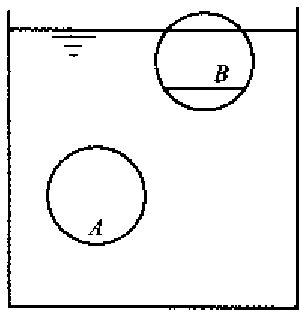


图 2.4 液体表面层受力分析

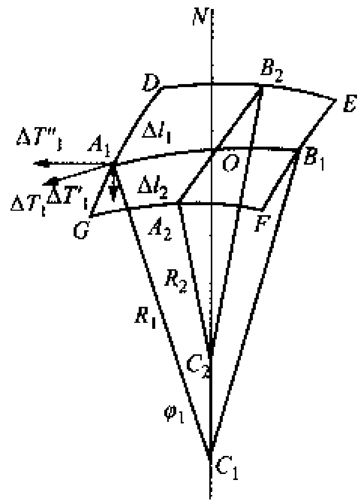


图 2.5 曲面上的表面张力

3. 毛细现象

当液体与固体表面接触时,接触处会产生一种表面现象(图 2.6)。例如水在玻璃上是散开的,水银在玻璃上是收缩成球形的。这样就说,水是润湿玻璃的,水银是不润湿玻璃的。为表明润湿或不润湿的程度,引入接触角的概念。在液体、固体壁和空气交界处作液体表面的切面,此面与固体壁在液体内部所夹的角度 θ 就称为这种液体对该固体的接触角。当 θ 为锐角时,液体润湿固体;当 θ 为钝角时,液体不润湿固体;若 $\theta=0°$,则液体完全润湿固体;若 $\theta=180°$,则液体完全不润湿固体。水与洁净玻璃的 $\theta=0°$,水银与玻璃的 $\theta=138°$。

润湿或不润湿决定于液体的性质,即由液-固分子之间的相互吸引力(称附着力)大于或小于液-液分子之间的相互吸引力(称内聚力)这一因素决定。设液体与固体接触处,沿固体壁有一层液体,称附着层,其厚度等于液体分子间引力的有效作用距离和液-固分子间引力的有效作用距离的较大者。当附着力大于内聚力时,液体分子在附着层内所受的合力垂直于附着层且指向固体,液体分子倾向挤入附着层,沿附着层扩展,从而润湿固体;反之,当内聚力大于附着力时,附着层内的较多的液体分子被吸引到液体内部,附着层呈收缩倾向,呈现不润湿现象。

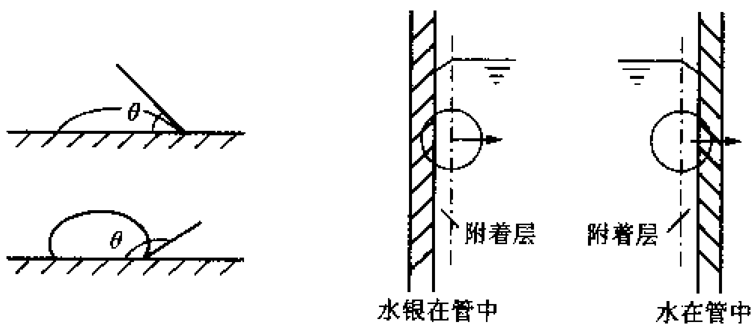


图 2.6 液体的润湿与接触角

将细管插入液体后管内水面会升高或下降,这种现象称为毛细现象。产生这一现象的管子称为毛细管,毛细现象是由表面张力及接触角所决定的。

在液体润湿表面的情况下,毛细管刚插入液体中时,由于接触角为锐角,液面就变为凹面,使液面下方 B 点(图 2.7)的压强比液面上方的大气压小,而在与 B 点同高的水平液面处的 C

点的压强仍与液面上的大气压相等。根据液体静力学原理，同高两点的压强应相等，因此液面不能平衡而要在管中上升，直至 B 点与 C 点压强相等为止。设细管截面为圆形，则凹面可以近似地看作半径为 R 的球面，因此依式(2-10)，A 点的压强比大气压 p_0 小一个量 $2\sigma/R$，即

$$p = p_0 - 2\sigma/R$$

式中 σ 是表面张力系数。再由液体静力学原理，$p_B = p_C = p_A + \rho g h$，故 $2\sigma/R = \rho g h$。设 r 为毛细管半径，则因

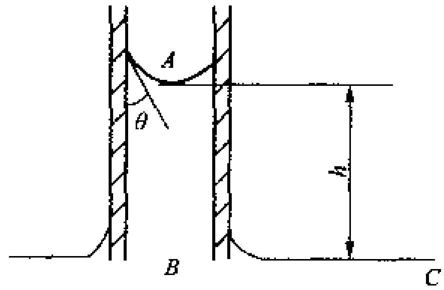


图 2.7　毛细原理

$$R = r/\cos\theta \tag{2-11}$$

其中 θ 为接触角，因此

$$h = 2\sigma\cos\theta/(\rho g r) \tag{2-12}$$

该式表明 h 与 σ 成正比，与 r 成反比，并与 θ 有关。因此，管子愈细，h 愈大。

同样，对液体不润湿的情况，管中液面下降，下降的距离 h 同样由式(2-12)计算，只是 θ 为钝角，h 为负值。

2.2　流体运动物理量的描述

2.2.1　拉格朗日坐标与欧拉坐标

在流体力学中通常采用两种坐标拉格朗日坐标与欧拉坐标来表示流体的运动。

1. 拉格朗日坐标

为了识别运动流体中的一个质点，我们以一组数(a,b,c)作为其标记，即不同的质点以不同的数(a,b,c)表示，我们称这组数(a,b,c)为拉格朗日(Lagrange)坐标或随体(数组(a,b,c)跟随该质点)坐标。拉格朗日坐标可以质点初始时刻 $t=t_0$ 时的位置坐标(x_0,y_0,z_0)来表示。显然，流体质点不管什么时候运动到哪里，其拉格朗日坐标并不因此而改变。

2. 欧拉坐标

为了表示流体质点在不同时刻运动到空间的某个位置，以一固定于空间的坐标系的一组坐标(q_1,q_2,q_3)来表示该位置。根据连续性假设，流体质点是连续地布满流体所占空间的，因此可以认为流体质点与空间的点及其一组坐标(q_1,q_2,q_3)是一一对应的，称这组坐标为欧拉(Euler)坐标或空间坐标。欧拉坐标可以用直角坐标(x,y,z)、柱坐标(r,θ,z)或球坐标(R,θ,λ)来表示。显然，同一时刻不同流体质点处于不同的空间位置上，因而具有不同的空间坐标，它们于初始时刻又分别在不同的空间位置从而有不同的随体坐标。因此，欧拉坐标既不同于拉格朗日坐标又相互关联。

为了描述和研究流体质点的物理量的函数关系，可以采用拉格朗日坐标与欧拉坐标，并分别称之为拉格朗日描述及欧拉描述。

2.2.2　拉格朗日描述、欧拉描述与随体导数

1. 拉格朗日描述

拉格朗日描述也称随体描述，它着眼于流体质点，并认为其物理量是随流体质点及时间变

化的，即将流体质点的物理量表示为拉格朗日坐标及时间的函数。设拉格朗日坐标为(a,b,c)，以此坐标表示的流体质点的物理量，如矢径、速度、压强等在任一时刻t的值，便可以写为a,b,c及t的函数。

若以f表示流体质点的某一物理量，其拉格朗日的数学描述是

$$f=f(a,b,c,t) \tag{2-13}$$

例如，设时刻t流体质点的矢径即t时刻流体质点的位置以r表示，其拉格朗日描述为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,b,c,t) \tag{2-14}$$

或
$$x_i=x_i(a,b,c,t)\quad(i=1,2,3)$$

或
$$x=x(a,b,c,t)$$
$$y=y(a,b,c,t)$$
$$z=z(a,b,c,t)$$

它表示拉格朗日坐标为(a,b,c)的流体质点在时刻t处于$\boldsymbol{r}$，即空间点(x,y,z)的位置。

同样，质点速度的拉格朗日描述是：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(a,b,c,t)$$

由于质点速度是该质点矢径r对时间变化率，因而有

$$\boldsymbol{V}(a,b,c,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(a,b,c,t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\Delta t}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \tag{2-15}$$

或
$$v_i(a,b,c,t)=\frac{\partial x_i}{\partial t},i=1,2,3$$

或
$$u(a,b,c,t)=\frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t}$$
$$v(a,b,c,t)=\frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t}$$
$$w(a,b,c,t)=\frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t}$$

上式中在对t求导数时，以(a,b,c)标记的流体质点的速度正是该质点矢径的时间变化率，因此a,b,c在求导中是不变的。

质点加速度的拉格朗日描述是

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(a,b,c,t)$$

即类似地，它是该质点于t时刻的速度对时间变化率，因而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(a,b,c,t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{V}(a,b,c,t+\Delta t)-\boldsymbol{V}(a,b,c,t)}{\Delta t}\\&=\frac{\partial \boldsymbol{V}(a,b,c,t)}{\partial t}\\&=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{2-16}$$

或 $a_i(a,b,c,t)=\dfrac{\partial v_i(a,b,c,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 r_i(a,b,c,t)}{\partial t^2}\quad i=1,2,3$

同样，压强p的拉格朗日描述是

$$p=p(a,b,c,t)$$

2. 欧拉描述

欧拉描述也称空间描述，它着眼于空间点，认为流体的物理量随空间点及时间而变化，即它把流体物理量表示为欧拉坐标及时间的函数。设欧拉坐标为(q_1,q_2,q_3)，用欧拉坐标表示的各空间点上的流体物理量如速度、压强等等在任一时刻 t 的值，可写为 q_1,q_2,q_3 及 t 的函数。从数学分析可知，当某时刻一个物理量在空间中每一点上的值确定时，即某时刻一个物理量在空间的分布一旦确定，即该物理量在此空间形成一个场。因此，欧拉描述实际上描述了一个物理量的场。

应该指出，由于某时刻在空间点(q_1,q_2,q_3)上必有一流体质点占据，因此在流体占有的空间点上的物理量，即欧拉描述的物理量实际上也就是占据该空间点的流体质点的物理量。

若以 f 表示流体的一个物理量，其欧拉描述的数学表达是(设空间坐标取用直角坐标)

$$f = F(x,y,z,t) = F(\boldsymbol{r},t) \tag{2-17}$$

例如，流体速度的欧拉描述是

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x,y,z,t) \tag{2-18}$$

或

$$v_i = v_i(x,y,z,t) \quad (i=1,2,3)$$

或

$$u=u(x,y,z,t)$$
$$v=v(x,y,z,t)$$
$$w=w(x,y,z,t)$$

它表示在空间点(x,y,z)上在时刻 t 的流体速度。很明显，该速度是某一流体质点的速度，不过这里并未显示出这一速度是属于哪个质点，但可以确定的是，在时刻 t 运动到空间点的那个流体质点有速度 $\boldsymbol{V}(x,y,z,t)$。

同样，压强的欧拉描述是

$$p=p(x,y,z,t)$$

欧拉描述实际上提供了不同物理量的场，如速度场、压强场、温度场等，在数学上可以运用场论来研究流体力学。此外，用欧拉描述可对研究流体力学中很多实际问题带来方便，如求作用于某一面上的压强合力，就可在该面上对压强求积分。因此，目前在流体力学中主要采用的描述方法是欧拉方法。

3. 随体导数

流体力学中常常要求流体质点的物理量随时间的变化率。例如，要求流体质点的加速度，它是流体质点速度随时间的变化率。这种流体质点物理量随时间的变化率称为随体导数或物质导数、质点导数。不言而喻，它意味着跟随流体质点运动时观测到的质点物理量的时间变化率。

按拉格朗日描述，物理量 f 表示为 $f=f(a,b,c,t)$，f 的随体导数就是跟随质点(a,b,c)的物理量 f 对时间 t 的导数(这时 a,b,c 是不变的)，即$\partial f/\partial t$。例如，速度 $v(a,b,c,t)$是矢径 $r(a,b,c,t)$对时间的偏导数

$$\boldsymbol{V}(a,b,c,t)=\frac{\partial \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t}$$

即随体导数就是偏导数。如加速度 $\boldsymbol{a}(a,b,c,t)$是速度 $\boldsymbol{V}(a,b,c,t)$对时间的偏导数

$$\boldsymbol{a}(a,b,c,t)=\frac{\partial \boldsymbol{V}(a,b,c,t)}{\partial t}$$

如式(2-15)、或(2-16)所示。

按欧拉描述，物理量 f 表示为 $f=F(x,y,z,t)$，但$\partial F/\partial t$ 并不表示随体导数，它只是物理量在空间点(x,y,z)上的时间变化率(f 取自(x,y,z)这一点)。而随体导数必须是跟随时刻 t 位于(x,y,z)空间点上的那个流体质点，其物理量 f 的时间变化率(这个 f 取自同一流体质点，而非取自同一空间点(x,y,z)。由于该流体质点是运动的，即 x,y,z 是变化的，若以 a,b,c 表示该流体质点的拉格朗日坐标，则 x,y,z 将依式(2-14)变化，从而 $f=F(x,y,z,t)$的变化依求导连锁法则处理。因此，物理量 $f=F(x,y,z,t)$的随体导数是

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}F(x,y,z,t)}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}F[x(a,b,c,t),y(a,b,c,t),z(a,b,c,t),t] \\
&= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial t} \\
&= \frac{\partial F}{\partial x}u+\frac{\partial F}{\partial y}v+\frac{\partial F}{\partial z}w+\frac{\partial F}{\partial t} \\
&= (\mathbf{V}\cdot\nabla)F+\frac{\partial F}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{2-19}
$$

其中 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ 表示随体导数，在上式推导中已用了式(2-14)。式(2-19)表明，求质点物理量的随体导数，欧拉描述与拉格朗日描述大不相同。欧拉描述的随体导数须用局部导数和位变导数两者之和描述。式(2-19)的第一项是$\frac{\partial F}{\partial t}$，它表示 x,y,z 不变时，在该空间点上的物理量的时间变化率，称为局部导数，它是由物理量不定常性造成的(对定常场该项为零)。式(2-19)的第二项 $F,\nabla F$ 称为位变导数，它是在非均匀的 f 场中(有梯度∇F)，由空间位置变化(有 $\mathbf{V}$)引起的。

按照式(2-19)，流体质点的加速度则是流体质点速度 $\mathbf{V}(x,y,z)$的随体导数，即

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(x,y,z) &= \frac{\mathrm{D}\mathbf{V}(x,y,z,t)}{\mathrm{D}t} \\
&= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \\
&= (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}+\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{2-20}
$$

或

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{\mathrm{D}u(x,y,z,t)}{\mathrm{D}t} = (\mathbf{V}\cdot\nabla)u+\frac{\partial u}{\partial t} \\
a_y &= \frac{\mathrm{D}v(x,y,z,t)}{\mathrm{D}t} = (\mathbf{V}\cdot\nabla)v+\frac{\partial v}{\partial t} \\
a_z &= \frac{\mathrm{D}w(x,y,z,t)}{\mathrm{D}t} = (\mathbf{V}\cdot\nabla)w+\frac{\partial w}{\partial t}
\end{aligned}
$$

采用欧拉描述的流体质点的任何物理量，不管是标量还是矢量，其随体导数都类似于式(2-19)或式(2-20)，因此就有公式

$$
\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)
\tag{2-21}
$$

这是流体力学中十分重要的基本公式。只要流体质点的物理量采用欧拉描述，其他随体导数即质点物理量对时间变化率就将采用这一公式进行计算。

2.2.3　描述流体运动的几个概念

为了形象地从几何上了解特定流体质点和整体运动情况，下面讨论迹线、流线、流管、流束及总流。

1. 迹线

所谓流体质点的迹线就是流体质点运动的轨迹，也就是该流体质点在不同时刻的运动位置的连线。在流体力学中通常采用欧拉描述，速度的微分形式可写为

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)}=\frac{dy}{v(x,y,z,t)}=\frac{dz}{w(x,y,z,t)}=dt \tag{2-22}$$

求解之，即可得到迹线方程，其积分常数由某时刻的质点位置确定。

例 2-1　已知　$u=x$，$y=-y$，其迹线微分方程为$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}$，求迹线。

解：对方程积分，即得 $xy=C_1$。若初始条件为质点位于空间点(a,b)上，则 $C_1=ab$。得迹线 $xy=ab$。

例 2-2　已知　$u=x-2y$，$v=x-y$，$w=0$，求其迹线方程。

解：因 $dx/dt=x-2y$，式中 x,y 都是 t 的函数，不能直接积分，但

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}-2\frac{dy}{dt}=(x-2y)-2(x-y)=-x,$$

积分之，得

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t$$

再由 $u=x-2y$，有

$$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{dx}{dt}\right)=\frac{1}{2}(C_1-C_2)\cos t+\frac{1}{2}(C_1+C_2)\sin t$$

$$z=C_3$$

当 $t=0$，$(x,y,z)=(a,b,c)$，所以

$$C_1=a$$
$$C_2=a-2b$$
$$C_3=c$$

代入得

$$\begin{cases}x=a\cos t+(a-2b)\sin t\\ y=b\cos t+(a-b)\sin t\\ z=c\end{cases}$$

上式即为所求迹线方程。

2. 流线

流线的形状由流体的瞬时速度分布决定。所以当速度分布确定后，流线也是确定的(图 2.8)。在任意一点沿流线取一微位移矢量

$$d\boldsymbol{s}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}$$

由流线定义知道，沿流线的微位移矢量与速度矢量方向

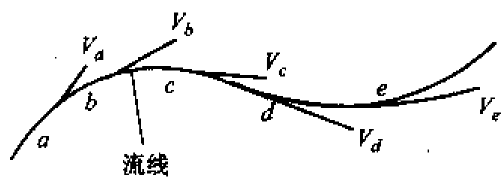


图 2.8　流线示意图

平行，故

$$\boldsymbol{V}\times \mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$$

写成分量形式：

$$(v\mathrm{d}z-w\mathrm{d}y)\boldsymbol{i}+(w\mathrm{d}x-u\mathrm{d}z)\boldsymbol{j}+(u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x)\boldsymbol{k}=0$$

一个矢量等于零，它的每个分量都应该等于零，故有

$$v\mathrm{d}z-w\mathrm{d}y=0 \qquad w\mathrm{d}x-u\mathrm{d}z=0 \qquad u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x=0$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z,t)} \tag{2-23}$$

这就是流线的微分方程。把 t 作为参数，将上式对 x,y,z 积分，便可得到两族曲面方程，这两族曲面的交线就是流线。

例 2-3 已知流场的速度分布 $u=x+t,\ v=-y+t,\ w=0$，试求当 $t=0$ 时，过 $M(-1,-1,0)$ 点的流线。

解：根据流线微分方程，得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{x+t}=\dfrac{\mathrm{d}y}{-y+t}\\ \mathrm{d}z=0\end{cases}$$

把 t 作为参数，积分上式后得到

$$\begin{cases}(x+t)(-y+t)=C_1\\ z=C_2\end{cases}$$

这两族曲面的交线就是空间的一族流线。

代入 $t=0,x=-1,y=-1,z=0$，定出对应的积分常数：

$$C_1=-1,\quad C_2=0$$

所以，$t=0$ 时过 M 点的流线为

$$\begin{cases}xy=1\\ z=0\end{cases}$$

这是 xOy 平面上的一条双曲线。

例 2-4 已知给定速度场，$u=x+t,\ v=-y-t$，求(1)$t=1$ 时，过(1,1)点的质点的迹线；(2)过(1,1)点的流线。

解：(1)由迹线微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y-t$$

积分得

$$x=C_1\mathrm{e}^{t}-t-1,\ y=C_2\mathrm{e}^{-t}-t+1$$

当 $t=1$ 时，过 $(x,y)=(1,1)$ 的质点有

$$C_1=3/\mathrm{e},\quad C_2=\mathrm{e}$$

最后得此质点的迹线方程为

$$x=3\mathrm{e}^{t-1}-t-1,\quad y=\mathrm{e}^{1-t}-t+1$$

(2)由流线方程

$$\frac{dx}{x+t}=\frac{dy}{-y-t}$$

积分得

$$(x+t)(y+t)=C_1$$

过(1,1)空间点有

$$C_1=(1+t)^2$$

故此流线方程为

$$(x+t)(y+t)=(1+t)^2$$

若当 $t=1$ 时,此流线方程为

$$(x+1)(y+1)=4$$

由此例知,流线和迹线不一致。

例 2-5　试由 $u=-tx$, $v=t(y+1)$ 求迹线及流线。

解:迹线及流线微分方程均为

$$\frac{dx}{-tx}=\frac{dy}{t(y+1)}$$

消去 t,积分得迹线与流线方程

$$x(y+1)=C$$

本例为不定常流体,但迹线与流线为同一条曲线。

上述例题表明,迹线是某一流体质点在一段时间内所经过的路径,是同一质点不同时刻所在位置的连线。而流线则是在特定的瞬时,根据各流体质点的速度方向所绘出的曲线。在非定常流动中,迹线与流线是不重合的。而在定常流动中,由于流线不随时间改变,流体质点沿流线运动,故流线与迹线重合。

3. 流面、流管、流束和总流

流管(图2.9)是流线概念的延伸。于某一时刻,在速度场中作一条非流线的曲线 C,经该曲线上每一点作流线,则这些流线在空间就形成一个面,这个面称流面。若所作非流线的曲线本身是封闭的,则由此封闭曲线所作所有流线构成一管状曲面,称之为流管。流管内所有流线的总和称为流束。断面为无穷小的流束称为微元流束,流线可以被认为是微元流束的极限。

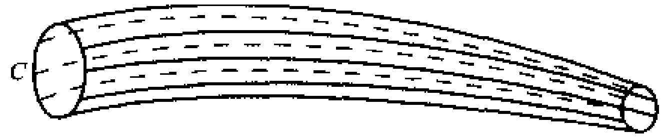


图 2.9　流管

由于速度与流线相切,故流体的流动不可能穿越流管壁面,流管内的流体就像是在一个真实的管子里流动一样,只能从流管的一端流入,从另一端流出。

全部流体的流动称为总流。总流是由无数微元流束组成的,工程上的许多流动问题,例如管道中的流动,都是总流。在总流中,断面上各点的流动参数(速度、压力等)一般是不相等的。

4. 有效断面、流量

与每条流线都正交的流束断面称为流束的有效断面或有效截面。当组成流束的所有流线相互平行时,有效断面是平面;当流线相互不平行时,有效断面是曲面。

一般来说,有效断面上各点的运动参数是不等的。但是对于微元流束,我们可以认为它的有效断面是平面,并且在有效断面上各运动参数是常数。

单位时间内通过某一特定空间曲面的流体量称为流量。由于流体量可用体积、质量来度量，故流量又可相应地分为体积流量和质量流量，其中以体积流量使用得最多。以后提到“流量”，若没有特别加以说明，一般都是指体积流量。

根据定义，通过任意面积 A 的体积流量可表示为

$$q_V = \int_A V_n \mathrm{d}A = \int_A \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A$$

其中 v_n 是速度 v 在面积 A 法线方向的投影，$\boldsymbol{n}$ 是 A 的法向单位矢量。体积流量的单位是$\mathrm{m^3/s}$。

通过面积 A 的质量流量表示为

$$q_m = \int_A \rho V_n \mathrm{d}A = \int_A \rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A \tag{2-24}$$

它的单位是 kg/s。

根据有效断面的定义可知，通过微元流束有效断面的质量流量是

$$\mathrm{d}q_m = \rho V \mathrm{d}A$$

其中 $\boldsymbol{V}$ 是有效断面上的速度，$\mathrm{d}A$ 是有效断面面积。

通过面积为 A 的有效断面的质量流量为

$$q_m = \int_A \rho V \mathrm{d}A$$

5. 平均速度

为了简化问题，经常要把流束作为一元流动来处理，由于流束有效断面上各点速度一般不相等，所以需要引入平均速度的概念。所谓平均速度是指流经有效断面的体积流量 q 除以有效断面面积 A 所得的商，平均速度用 $\bar{V}$ 表示，即

$$\bar{V} = \frac{q}{A}$$

习 题

1. 已知流场的速度分布为 $\boldsymbol{V} = x^2 y \boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j} + 2z^2 \boldsymbol{k}$，求点 $A(x,y,z)=A(3,1,2)$的加速度。

2. 已知流场的速度分布为 $\boldsymbol{V} = -ky\boldsymbol{i} + kx\boldsymbol{j}$，其中 k 是常数。求通过 $x=a, y=b$ 点的流线。

3. 不可压缩流体作定常流动，其速度分布为 $\boldsymbol{V} = ax\boldsymbol{i} + ay\boldsymbol{i} - 2az\boldsymbol{k}$，其中 a 是常数。

(1) 判断此流场是否有可能存在；(2) 求流线方程；(3) 求加速度。

4. 流体的运动用

$$x=a, \quad y=\mathrm{e}^t \frac{b+c}{2} + \mathrm{e}^t \frac{b-c}{2}, \quad z=\mathrm{e}^t \frac{b+c}{2} - \mathrm{e}^t \frac{b-c}{2}$$

表示，求速度的拉格朗日描述与欧拉描述。

5. 已知拉格朗日描述为

$$x=a\mathrm{e}^{-2t/k}, \quad y=b\mathrm{e}^{t/k}, \quad z=c\mathrm{e}^{t/k}$$

(1) 问运动是否定常，是否为不可压流体；(2) 求 $t=1$ 时在(1,1,1)点的加速度；(3) 求过点(1,1,1)的流线。

6. 已知 $u=x+1, v=x, w=0$，求

(1) 速度的拉格朗日描述；(2) 质点加速度；(3) 迹线及流线。

7. 已知 $u=yt, c=xt, w=0$，求

(1) 加速度场及 $t=1$ 时在 $x=1, y=1$ 处的值；(2) 迹线及流线及经(0,1,0)处的流线和 $t=1$时在(1,0,0)处迹线。

8. 给出速度场

$$u=\frac{cx}{x^2+y^2},\ v=\frac{cy}{x^2+y^2},w=0$$

求迹线和流线方程，式中 c 为常数。

9. 给出速度场

$$u=-\frac{cx}{x^2+y^2},\ v=\frac{cy}{x^2+y^2},\ w=0$$

求迹线和流线方程，式中 c 为常数。

10. 已知 $u=(a-1)e^t, v=1-(b+1)e^{-t}, w=0$，求 (1)加速度场及 $t=1$ 时在 $x=1, y=1$ 处的值；(2)迹线及流线及经(0,1,0)处的流线和 $t=1$ 时在(1,0,0)处迹线。

第 3 章 流体力学理论基础

流体力学是一门基础性很强和应用性很广的学科，其研究对象与国民经济生产的需要和科学技术的发展息息相关。按照本课程的教学要求，遵循学科间相互交叉和融合的原则，在第一章对流体力学基础知识论述的基础上，本章将重点研究理想流体静止和流动状态下的力学规律，包括流体静力学和动力学的基本方程及其在工程中的应用和基本计算，为后续讲解传热学部分奠定必要的理论基础。

3.1 流体的平衡——流体静力学基础

如果流体相对于某一坐标系静止不动，即流体在力学上处于平衡状态。研究流体平衡状态下的力学规律称为流体静力学。它是进一步研究流体运动状态下的力学规律的重要基础。所谓流体静止状态，是指所有的流体质点相对于某一选定的坐标系没有运动。通常把地球选择为惯性参考坐标系，若所选参考坐标系相对于地球表面没有运动，在该坐标系下的静止为绝对静止（简称静止）；若所选参考坐标系相对于地球表面有运动，在该坐标系下的静止为相对静止。

流体处于静止或相对静止状态时所具有的共性是：由于流体质点间没有相对运动，流体不呈现黏性，流体内每一点的切应力都为零。作用在静止流体的表面力只有静压力。此时，研究外力作用下流体处于平衡的力学规律就是压力（压强）分布规律。基于本书的特点，这一节将重点讨论平衡状态下流体中的压强分布以及它们作用于浸没在其中的物体上的力和力矩。

3.1.1 平衡状态下流体中的应力特征

当流体处于静止或相对静止状态时，作用在流体上的静压力就是负的法向应力。具有两个重要特征：

特征一：流体静压力的方向垂直于作用面，并沿作用面的内法线方向。由于流体分子间的吸引力很小，流体不能承受拉力；又因为流体要保持静止状态，就不能有剪切力作用。故流体处于静止或相对静止状态时，唯一存在的作用力便是沿作用面内法线方向的压强。如图 3.1 所示，静止流体在容器中壁面上的静压强。

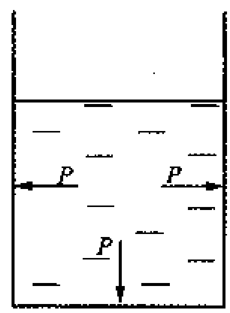


图 3.1 流体静压力恒垂直于容器壁面

特征二：流体静压强的大小与作用面的方向无关，只是该点坐标的函数。即在静止流体中的任意给定点上，不论来自何方的静压力均相等。

为了证明这个特征，在静止流体中任取一点 o。以 o 为直角坐标系的原点。取边长为 dx,dy,dz 的微元四面体 $abcd$，如图 3.2 所示。

如图所示，作用在平面 oac，obc 和 oab 上的静压力分别平行于 x 轴，y 轴和 z 轴，用 p_x，p_y 和 p_z 分别表示它们的平均值；用 p_n 表示作用在平面 abc 上的静压力的平均值，用 ρ 表示微团

的平均密度，用 f_x，f_y 和 f_z 分别表示单位质量流体上所作用的质量力在 x，y 和 z 方向的分量。由于微团是从静止流体中取出的，作用在其上的所有力应该满足平衡条件。根据诸力在 x 轴上投影的代数和为零的条件即可得

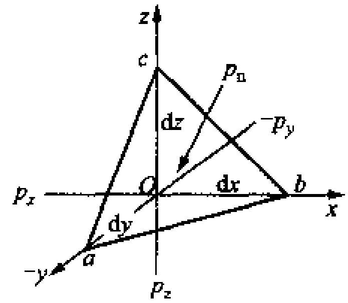


图 3.2　微元四面体的受力示意图

$$p_x \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - p_n \cdot A_n\cos(p_n, x) + f_x\rho \cdot \frac{1}{6}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

式中 A_n 是平面 abc 的面积，$A_n\cos(p_n, x)$是平面 abc 在 yoz 平面上的投影面积，等于$\frac{1}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，则上式可写成

$$(p_x - p_n) \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f_x\rho \cdot \frac{1}{6}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

或

$$p_x - p_n + \frac{1}{3}f_x\rho\,\mathrm{d}x = 0$$

同理，根据诸力在 y 轴上和 z 轴上投影的代数和等于零的条件，可得到关系式

$$p_y - p_n + \frac{1}{3}f_y\rho\,\mathrm{d}x = 0$$

$$p_z - p_n + \frac{1}{3}f_z\rho\,\mathrm{d}x = 0$$

当以 o 点为极限，$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 趋于零时，p_x，p_y，p_z 和 p_n 即可认为是作用在同一点（即 o 点）上的静压力。并且，由上述三式可得

$$p_x = p_y = p_z = p_n \tag{3-1}$$

这里对 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 的相对大小并没有做限制，所以 p_n 的方向是任意的。

式(3-1)证明了静压力的大小与其作用面的方向无关。这就是说，在流体中的每一个空间点上，静压力的大小是由其坐标位置决定的。即流体静压力是空间位置的标量函数：

$$p = p(x, y, z) \tag{3-2}$$

3.1.2　流体的平衡微分方程式

为了解析地探求静止流体平衡的规律，从流体中任意取出边长为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 的平行六面体微团 $abcd$-$a'b'c'd'$（如图 3.3 所示）。其形心点为 $M(x, y, z)$，并且在 M 点密度是 ρ；压力是 p，单位质量流体的质量力是 f_x，f_y，f_z。平面 $abcd$-$a'b'c'd'$的形心点分别为 $m(x+\frac{1}{2}\mathrm{d}x, y, z)$和 $m'(x-\frac{1}{2}\mathrm{d}x, y, z)$。

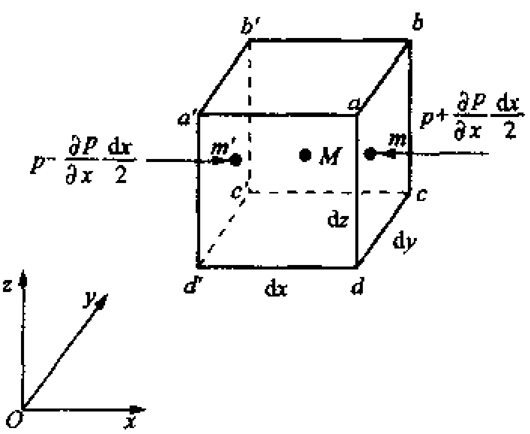


图 3.3　平行六面体微团

由于 mM 的长度为$\frac{1}{2}\mathrm{d}x$，是一个微量，因此 m 点的静压力可用对 M 点的泰勒级数展开表示。略去二阶以上的微量后，m 点的压力表示为 $p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}$。同

样，m'点的压力可以表示成$p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}$。

根据作用在微团上的所有的力平衡的原理，诸力在 x 轴上投影的代数和等于零。可得沿 x 方向的平衡方程

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz+f_x\rho dxdydz=0$$

化简后得到

$$f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

对于 y,z 方向，同理可得

$$f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{3-3}$$

$$f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

式(3-3)用矢量方程来表示

$$\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p=0 \tag{3-4}$$

式(3-3)或式(3-4)就是静止流体的平衡微分方程式。它是欧拉(Leonard Euler，俄籍瑞典数学家物理学家。)于 1755 年首先导出的，故又称欧拉平衡方程式。欧拉平衡方程式是流体静力学的基本方程，流体静力学的其他方程都是以它为基础导出的。式(3-4)中，$\boldsymbol{f}=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}$，$\nabla p=\mathrm{grad}\,p$ 。

由于静压力是作用点坐标的函数，它的全微分可以表示成

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz$$

把式(3-3)中的$\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial z}$解出来，并代入上式，便得到

$$dp=\rho(f_xdx+f_ydy+f_zdz) \tag{3-5}$$

此式称为压力差方程。它给出了两相邻点的压力差 dp 与坐标位置差 dx,dy,dz 之间的关系。压力差与密度 ρ 和质量力 f_x,f_y,f_z 有关。

流体中压力相等的诸点连成的曲面称为等压面。在等压面上相邻两点的压力差 dp 等于零。由式(3-5)可以得到等压面的微分方程为

$$f_xdx+f_ydy+f_zdz=0 \tag{3-6}$$

在确定的质量力下求解这个微分方程，就可以得到描述等压面的代数方程。

例如，流体处于重力场作用下，取 z 坐标垂直向上，则单位质量流体的质量力为

$$f_x=0,\quad f_y=0,\quad f_z=-g,$$

把它们代入式(3-6)，则得到液体处于重力场作用下的等压面微分方程 $gdz=0$ ；积分后得 $z=C$。这就是在重力场作用下的静止流体的等压面，是一族水平面。

如果质量力矢量可以用某一函数，例如$-\pi(x,y,z)$的梯度来表示，即

$$\boldsymbol{f}=-\nabla\pi \tag{3-7}$$

或

$$f_x=-\frac{\partial\pi}{\partial x},\quad f_y=-\frac{\partial\pi}{\partial y},\quad f_z=-\frac{\partial\pi}{\partial z} \tag{3-8}$$

则这种质量力就称为有势质量力，$\pi(x,y,z)$称为力的势函数。不难证明，重力场是一种有势力场。

把式(3-8)代入式(3-6)，得到

$$\frac{\partial\pi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\pi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\pi}{\partial z}\mathrm{d}z=0 \quad 或 \quad \mathrm{d}\pi=0$$

可见，如果质量力是有势的，那么在等压面上势函数是一个常数，即这时等压面也是等势面。

3.1.3　流体静力学基本方程

工程实际中，经常会遇到作用在流体上的质量力仅仅是重力，而流体又近似为均质不可压缩的(ρ=常数)。在这两个条件下讨论流体静力学基本方程。

取坐标系如图3.4所示，x轴和y轴在水平面内，z轴垂直向上，则单位质量流体的质量力为$f_x=0,f_y=0,f_z=-g$，将它们代入压力差方程式(3-5)得到

$$\mathrm{d}p=\rho g\,\mathrm{d}z \tag{3-9}$$

命$\gamma=\rho g$(γ为重度，单位$\mathrm{N/m^3}$)，

则z上式可改写为

$$\mathrm{d}z+\frac{\mathrm{d}p}{\gamma}=0 \tag{3-10}$$

对于均质不可压缩流体，γ为常数，上式积分后得到

$$z+\frac{p}{\gamma}=C \tag{3-11}$$

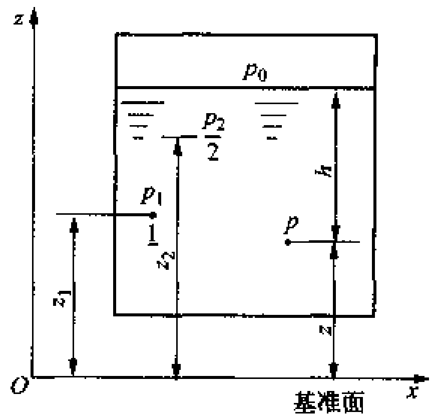


图3.4　流体静力学坐标示意图

式中C是积分常数，由边界条件确定。在图3.4中，点1，点2相对于基准面的高度分别为z_1,z_2，压力分别为p_1,p_2，将式(3-11)用于点1和点2，得到

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}=z_2+\frac{p_2}{\gamma} \tag{3-12}$$

式(3-11)或式(3-12)称为流体静力学基本方程，它适应于在重力场中处于静止状态的均质不可压缩流体。

若图3.4中液体自由面上压力为p_0。将式(3-11)用于液面上一点和液体内淹深为h的任意一点，则有

$$z+\frac{p}{\gamma}=(z+h)+\frac{p_0}{\gamma}$$

即

$$p=p_0+\gamma h \tag{3-13}$$

式(3-13)表明，在处于静止状态的液体中，任意一点的压力等于液面压力加上高度为h的液柱所产生的压力。如果液面上的压力发生了变化，则液体内其余点的压力也会随之变化同样的数值。这就是压力传递的帕斯卡原理(Blaise Pascal)。

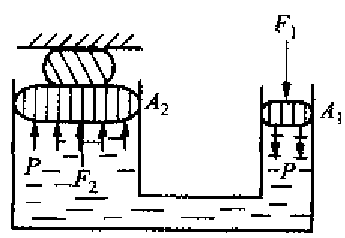


图3.5　水压机工作原理示意图

利用压力传递的帕斯卡原理，人们设计和制造出了各种液压装置。包括水压机、增压油缸等液压传动装置。图3.5是水压机的基本原理示意图。图中两个相连的容器的横截面积分别为A_1和A_2，液面上各有一活塞。如果在活塞1上施加压力F_1，则在容器1液面

上产生的压力增量为 F_1/A_1。这个压力增量传递到液体中的每一点，也包括活塞 2 的下部，使液体对活塞 2 施加一个大小为

$$F_2=\frac{A_2}{A_1}F_1$$

的力。由于 $A_2>A_1$，所以 $F_2>F_1$，其放大倍数就是 A_2/A_1。这个放大了的力可以用来加工物体。

静力学基本方程是求解流体静止状态下力的分布的重要依据，它具有明确的物理意义和几何意义。在水力学中，将式(3-11)中第一项 z 称为位置高度或位置水头。它代表单位质量流体的位势能，是流体中点相对于基准面的高度，如图 3.6 所示。当把已被抽成真空的闭口测压管连接到容器上具有压力 p 的 a 点时，容器内的液体将在压强 p 和完全真空间的压差作用下，沿测压管上升到一定的高度。上升的液体压力减小而它们所具有的位势能增大。液体中以压力形式存在的势能称之为压力势能。式(3-11)中第二项 p/γ 代表单位质量流体的压力势能。将式(3-12)用于 a,b 两点，则得到

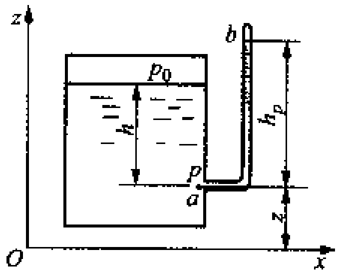


图 3.6　位置水头示意图

$$z+\frac{p}{\gamma}=(z+h_p)+0$$

$$\frac{p}{\gamma}=h_p \tag{3-14}$$

即 p/γ 与液柱高度 h_p 相当，称之为压力高度或压力水头。位势能与压力势能之和 $(z+p/\gamma)$ 称为总势能；在水力学中将水位置水头与压力水头之和称为静水头。流体静力学基本方程的物理意义为：当均质不可压缩流体在重力场中处于静止时，在流体中的任意点上，单位质量流体的总势能是个常数。其几何意义为：任意点的静水头均相等。如果把基准面作为起点，画出每一点的静水头，那么所有的水头高度线的端点应该落在同一水平线上，这条水平线称为静水头线。

液体中的静水头可以用测压管来测量(见图 3.7)。在密封容器中盛有液体，把两根已被抽成完全真空的闭口测压管接到容器不同的部位上，尽管这两处的高度及液体的压力都不相同，但两根测压管中的液体却一定会上升到同一高度。测压管中液面相对于基准面的高度就是容器中液体的静水头。A-A 是静水头线。如果所接的测压管是开口的，那么测出的静水头将与闭口测压管测出的静水头相差一个大气压力相对应的液柱高度。工程中使用的测压管都是开口的。用开口测压管测出的静水头又称为计示静水头。

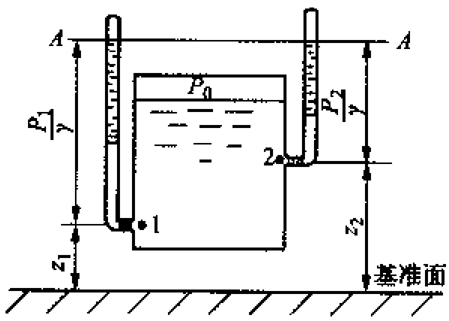


图 3.7　静水头线示意图

3.1.4　压力的表示及测量仪表

1. 绝对压力、表压力和真空度

压力可以用绝对压力、表压力和真空度来表示。以完全真空为基准计量的压力称为绝对压力；以大气压力为基准计量的压力称为表压力，它表示某点的压力值与大气压力值之差。用

p 表示绝对压力，用 p_g 表示表压力，p_a 是大气压力，它们之间的关系为

$$p_g = p - p_a$$

由于各地海拔高度和气温不同，各地的大气压力也稍有不同。国际上规定，1个标准大气压力为

$$p_a = 1.013\,25 \times 10^5 \, p_a$$

工程上采用工程大气压力，1工程大气压力$=9.806\,65\times 10^4\,p_a$。

若流体中某点的绝对压力低于大气压力，则该点表压力 p_g 为负值，即此时该点处于真空状态。当流体处于真空状态时，表压力的大小通常用真空度 p_v 来表示。真空度与绝对压力、大气压力和表压力之间的关系为

$$p_v = p_a - p = -p_g$$

若某点绝对压力为零时，即该点处于完全真空状态。理论上虽可分析，但实际要把容器抽成完全真空是很困难的。特别是容器盛有液体时，只要容器内液体的压力降低到饱和压力，液体就会开始气化，压力便不会再降低了。

2. 液体测压仪表

测量流体压力的仪器称为测压计。工程上常用的测压计有许多类型，下面介绍几种液柱测压计。

1) 测压管

图3.8所示的测压管，一般由一根透明的玻璃管组成。测压管是开口的，测出的都是表压力。点 A 的表压力可由管Ⅰ读出的液柱高度 h 按下式算出：

$$p_g = \gamma h$$

2) U形管测压计

图3.9所示的U形管测压计是一根透明的开口U形管。由刻度上读出 h_1、h_2 值后，用静力学基本方程确定所测压力。把基本方程(3-12)用于点 M 和点1，则得到

$$p_1 = p + \gamma_1 h_1$$

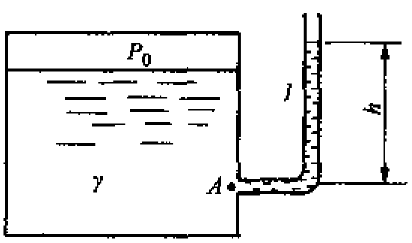


图3.8　测压管示意图

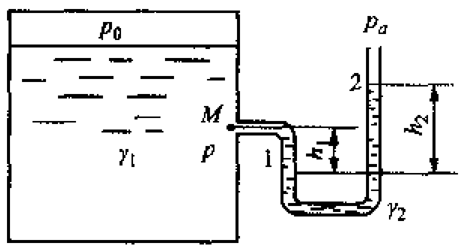


图3.9　U形管示意图

把基本方程用于点2和点1，并注意到测压管是开口的，故点2的压力等于大气压力。于是得到

$$p_1 = p_a + \gamma_2 h_2$$

两式中都含有 p_1，消去 p_1 后得到 $p = p_a + \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1$

p 是点 M 的绝对压力。该点表压力为

$$p_g = p - p_a = \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1 \tag{3-15}$$

若 $\gamma_2 \gg \gamma_1$，则上式最后一项可以忽略，于是式(3-15)可写为

$$p_g = \gamma_2 h_2 \tag{3-16}$$

此式用于测量气体的压力时是足够准确的。

3）倾斜式微压计

图 3.10 所示的为常用的倾斜式微压计的原理图，倾角 α 是可调的。如果斜管入口压力 p_1 和容器入口压力 p_2 相等，则容器内液面与斜管内的液面齐平。当 p_1 与 p_2 不相等时，例如，$p_2>p_1$，则斜管内液面上升 h，容器内液面下降 Δh，因此

$$p_2=p_1+\gamma(h+\Delta h)$$

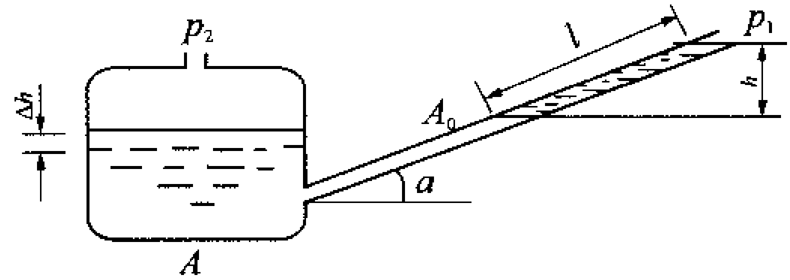


图 3.10　倾斜式微压计原理图

假设容器的截面积是 A，斜管的截面积是 A_0，斜管液面读数的变化是 l，则

$$\Delta hA=lA_0$$

再考虑到 $h=l\sin\alpha$，最后可以得到被测流体的压力差为

$$p_2-p_1=\gamma\left(\sin\alpha+\frac{A_0}{A}\right)l \tag{3-17}$$

上式表明，对于相同的压力差，若倾斜角 α 减小，则读数 l 就会增大。在测量压力差时，采用倾斜式测压计可以提高读数的精确度。

下面通过例题介绍另外两种测压计。

例 3-1　复式测压计

如图 3.11 所示的测压装置，假设容器 A 中水面上的表压力 $p_g=2.45\times10^4\,\text{N/m}^2$，液面高度差 $h_1=500\text{mm}$，$h_2=200\text{mm}$，$h_3=100\text{mm}$，$h_4=300\text{mm}$，$\gamma_1=\rho_1 g=9\,806\text{N/m}^3$，$\gamma_2=7\,840\text{N/m}^3$，$\gamma_3=133\,420\text{N/m}^3$，试求容器 B 中气体的压力 p。

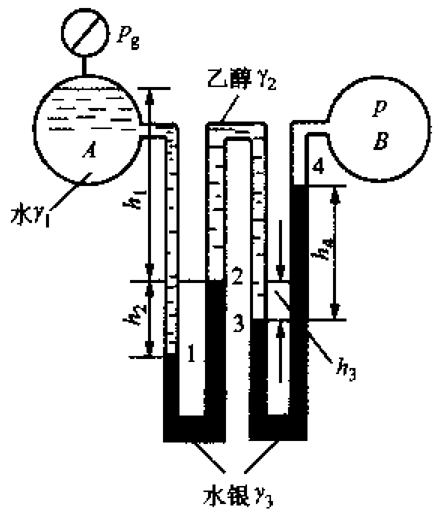


图 3.11　复式测压计示意图

解：标出如图 3.11 所示的 1，2，3，4 四个交界面。在交界面 1 上，表压力为

$$p_1=p_g+\gamma_1(h_1+h_2)$$

在交界面 2 上，表压力为

$$p_2=p_1-\gamma_3h_2=p_g+\gamma_1(h_1+h_2)-\gamma_3h_2$$

在交界面 3 上，表压力为

$$\begin{aligned}p_3&=p_2+\gamma_2h_3\\&=p_g+\gamma_1(h_1+h_2)-\gamma_3h_2+\gamma_2h_3\end{aligned}$$

在交界面 4 上，表压力为

$$\begin{aligned}p_4&=p_3-\gamma_3h_4\\&=p_g+\gamma_1(h_1+h_2)-\gamma_3h_2+\gamma_2h_3-\gamma_3h_4\\&=p_g+\gamma_1(h_1+h_2)+\gamma_2h_3-\gamma_3(h_2+h_4)\end{aligned}$$

气体的密度比液体的密度小得多，因此，在气体中压力随高度的变化可以忽略。于是，可以认为容器 B 内气体的压力就等于交界面 4 上的压力。代入数值后可以得到 $p=-34\,562\text{N/m}^3$。表压力为负值，说明容器 B 内的气体处于真空状态，其真空度为

$$p_v=34\,562\text{N/m}^2$$

图 3.11 所示的测压装置称为复式测压计，一般用来测量比较大的压力。

例 3-2　双杯式测压计

双杯式测压计如图 3.12 所示，上部盛油，$\gamma=9\,000\text{N/m}^3$，下部盛水，圆杯直径 $D=40\text{mm}$，管径 $d=4\text{mm}$，当 $p_1=p_2$ 时，$h=0$。试求 $p_1-p_2=98.06\text{N/m}^2$ 时，液面高度差 h 的读数。

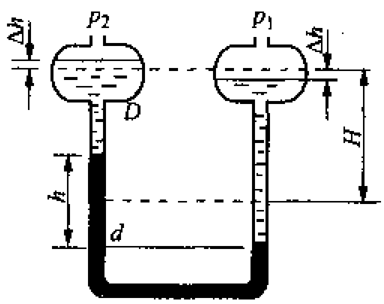


图 3.12　双杯测压计示意图

解：设 $h=0$ 时杯中液面与管内油、水交界面的高度差为 H，当 $p_1>p_2$ 时右边杯子里的液面下降 Δh，右管内液面下降 $\frac{h}{2}$。

因为 $\frac{1}{2}h\frac{\pi d^2}{4}=\Delta h\frac{\pi D^2}{4}$　所以 $\Delta h=\frac{1}{2}h\left(\frac{d}{D}\right)^2$

由左、右两边的液柱所求出的管内油、水交界面的压力应该相等，由此得

$$p_2+\gamma_{油}\left(\Delta h+H-\frac{h}{2}\right)+\gamma_{水}h=p_1+\gamma_{油}\left(H-\Delta h+\frac{h}{2}\right)$$

最后解出

$$h=\frac{p_1-p_2}{\gamma_{水}\left[1-\frac{\gamma_{油}}{\gamma_{水}}+\frac{\gamma_{油}}{\gamma_{水}}\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]}=0.109\,4\text{m}=109.4\text{mm}$$

3.1.5　流体相对平衡时的力学分析

相对静止也称为相对平衡。当流体处于相对静止状态时，所有的流体质点随参考坐标系一起运动，因此，需要考虑流体的运动加速度（参考坐标系作等速直线运动可以认为是相对静止的一种特殊情况，流体的受力状态与绝对静止下流体的受力状态完全一样）。根据达朗贝尔原理，只要在每一个流体质点上施加一个与加速度方向相反的惯性力，则静力学平衡原理就仍然适用。仍然存在应力的两个特征，流体的平衡微分方程(3-3)、(3-4)和压力差方程(3-5)仍然适用。与绝对静止状态不同的仅仅是此时考虑的质量力应该是实际作用的质量力与力的矢量和。

1. *均质流体整体的等加速度运动的相对静止*

盛有液体的容器，以不变的加速度 a 向右作直线运动（见图 3.13）。当容器内的液体稳定后，液体相对容器处于静止状态。此时液体自由面不再是一个水平面，而是一个倾斜的平面。取一固定在容器上的坐标系 xOz，坐标原点在液面上某一点，x 轴的正方向与容器的加速度方向一致。此时，流体上的质量力应该包括两部分：惯性力和重力。根据达朗贝尔原理，作用在单位质量流体的惯性力大小为 a，方向沿 x 轴的负方向。因此，单位质量流体作用的质量力为

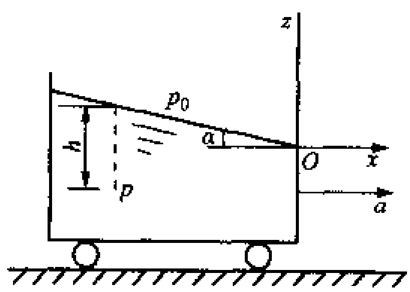


图 3.13　等加速水平运动容器中液体的相对静止

$$f_x=-a,\ f_y=0,\ f_z=-g$$

把它们代入压力差方程(3-5)，得到

$$dp = -\rho(a\,dx + g\,dz) \tag{3-18}$$

液体密度 ρ 可近似看为常数，上式积分后可得到

$$p = -\rho(ax + gz) + C$$

设自由面上压力为 p_0，由边界条件 $x=0, z=0$ 时，$p=p_0$，可以定出积分常数

$$C = p_0$$

于是

$$p = p_0 - \rho(ax + gz) \tag{3-19}$$

这就是等加速水平运动容器中液体的压力分布公式。

由于在等压面上 $dp=0$，故式(3-18)可以得到等压面微分方程

$$a\,dx + g\,dz = 0$$

积分上式，得到

$$ax + gz = C$$

这就是等压面方程，它表明在等加速水平运动的容器中，液体的等压面是一族平行的倾斜面，斜面与水平面之间的夹角 α 为

$$\alpha = \arctan\frac{g}{a} \tag{3-20}$$

自由面也是一个等压面。在自由面上，当 $x=0$ 时，$z=0$，于是式(3-20)中相应的积分常数 $C=0$，故自由面方程为

$$ax + gz_s = 0 \text{ 或 } z_s = -\frac{a}{g}x \tag{3-21}$$

式中 z_s 是自由面上 z 坐标。考虑到式(3-21)，压力分布公式(3-19)又可表示为

$$p = p_0 + \gamma_1(z_s - z) = p_0 + \gamma h \tag{3-22}$$

式中 $h = z_s - z$ 是液体中任意一点的淹深，可以看出，等加速水平运动容器中液体的压力分布公式(3-22)与绝对静止液体的压力分布公式(3-13)完全一样。

2. 均质流体整体地绕竖直轴等角速度旋转

如图 3.14 所示，容器的半径为 R，容器及其中的流体一起以等角速度 ω 绕容器中心轴旋转。建立如图所示的动坐标，坐标随容器和液体一起旋转，z 轴向上并与旋轴重合，坐标原点在液面上。由于液体质点具有向心加速度，故质量力除了重力外，还有离心惯性力为

$$f_x = \omega^2 x, \quad f_y = \omega^2 y, \quad f_z = -g$$

代入式(3-5)，得到

$$dp = \rho(\omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy - g\,dz) \tag{3-23}$$

积分后，得到流体中的压力分布：

$$p = \rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz\right) + C$$

或

$$p = \rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz\right) + C \tag{3-24}$$

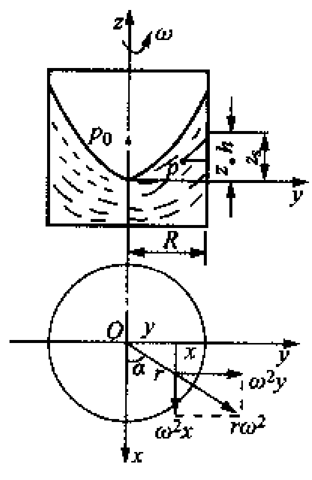


图 3.14　等角速度旋转容器中液体的相对静止

式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是液体中任意一点与旋转轴之间的距离。设自由面

上压力为 p_0，把边界条件 $r=0, z=0$ 时，$p=p_0$ 代入式(3-24)，得到

$$C=p_0$$

则压力分布可表示为

$$p=p_0+\rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz\right) \tag{3-25}$$

式(3-25)表明在同一高度上 $z=$常数时，压力 p 与 r^2 成正比；离开旋转轴越远，压力越大。

由式(3-23)还可以得到等压面微分方程

$$\omega^2 x\,dx+\omega^2 y\,dy-g\,dz=0$$

积分后得到等压面方程

$$\frac{\omega^2 x^2}{2}+\frac{\omega^2 y^2}{2}-gz=C$$

或

$$\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz=C \tag{3-26}$$

式(3-26)表明，等压面是一族绕 z 轴的旋转抛物面。

在自由面上，当 $r=0$ 时，$z=0$，式(3-26)中相应的积分常数 $C=0$，所以自由面方程为

$$\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz_s=0$$

或

$$z_s=\frac{\omega^2 r^2}{2g} \tag{3-27}$$

把式(3-27)代入式(3-25)，压力分布公式成为

$$p=p_0+\gamma(z_s-z)=p_0+\gamma h \tag{3-28}$$

其中 $h=z_s-z$ 是液体受容器的限制而不能形成旋转抛物面形的自由面时，液体内的等压面却仍然是旋转抛物面，压力分布仍然满足式(3-24)。

例如图 3.15 所示的容器，有一中心开小孔的顶盖，里面装满液体。当容器以等角速度 ω 旋转时，由于受顶盖的限制，不能形成旋转抛物面形的液面，但压力分布仍然为

$$p=\rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz\right)+C$$

空口处压力为 p_0，根据边界条件 $r=0, z=0$ 时，$p=p_0$ 得到 $C=p_0$，因此

$p=p_0+\gamma\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g}-z\right)$，作用在顶盖上各点的压力为

$$p=p_0+\gamma\frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

作用在顶盖上各点处的表压力如图 3.15 中箭头所示。由上式可以看出，r 越大，则 p 越大，故容器边缘处的压力最大；并且，旋转角速度 ω 越大，边缘处压力也越大。根据该原理，工程上用离心铸造法通过离心铸造机的高速旋转来增大铸模边缘处液态金属的压力，从而得到较密实的铸件。

又例如，顶盖边缘开口的容器，里面盛满液体，当容器旋转时作用在顶盖上的表压力分布如图 3.16 所示。向下的箭头表明表压力都是负的，即液体作用在顶盖上的压力小于大气压力。

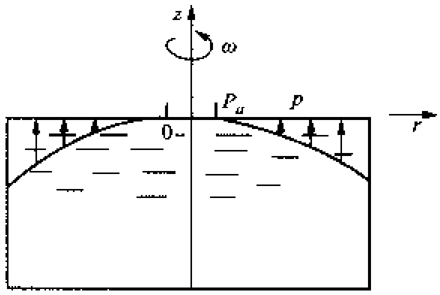


图 3.15

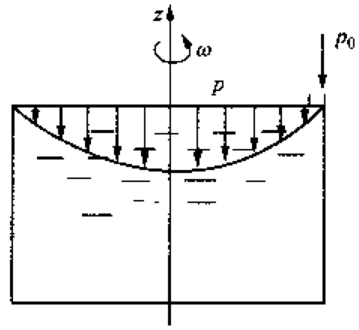


图 3.16

例 3-3 旋转容器溢出问题

已知：有一圆柱形容器高 $H=1.2\text{m}$，半径 $R=0.4\text{m}$，容器内盛有水。当容器静止时，水面高度恰好为容器高度的一半。试问，当容器绕其轴线旋转的转速 n 为多大时水开始溢出？

解：根据抛物线回转体的体积等于同底同高圆柱体体积的一半的知识，可知当容器旋转使液体上升至容器顶部溢出时，旋转抛物面自由面的顶点恰好在容器底部（见图 3.17）。

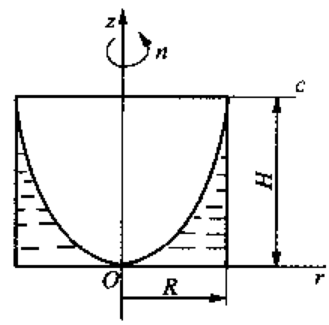


图 3.17

由自由面方程式(3-28)，$z_c=\dfrac{\omega^2r^2}{2g}$

在自由面上，当 $r=R$ 时，$z_s=H$，

则

$$\omega=\frac{1}{R}\sqrt{2gH}=12.13/\text{s}$$

转速

$$n=\frac{30\omega}{\pi}=115.8\text{r/min}$$

3.1.6 作用在物体表面的液体总压力

工程上不仅要知道流体中压力的分布，而且还需求得浸没在静止液体中的物体表面所受总压力的大小及其作用点。例如在设计各种阀、容器、管道、水工建筑物时就会遇到这类问题。本节将分别计算平壁和曲壁，浸没于流体中的物面上所产生的合力的大小、方向、作用线及静止液体作用在其上的总压力。

1. 均质流体作用在平面上的液体总压力

如图 3.18 所示，一个浸没在静止流体中的平面与水平面之间的交角为 α，它的面积为 A。取坐标系如图所示，x 轴和 y 轴在平面上，z 轴垂直于平面。由于平面上各点的淹深不一样，故各点的压力也不相同。由于静止流体中没有切应力，压力都沿法向指向平壁，故流体合力的方向显然垂直于平壁并指向内侧。

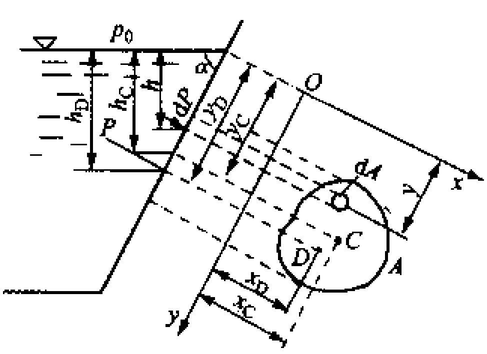


图 3.18

下面求作用力的大小和作用线。将面积 A 划分为若干个狭窄条形微元面积 dA，近似地认为作用在每个微元面积 dA 上各点的压力 p 是相等的。由于平面两边均

受大气压力的作用，可以不必考虑大气压力的影响。则流体作用在 $\mathrm{d}A$ 上的总压力为

$$\mathrm{d}p_{总}=p\,\mathrm{d}A=\gamma h\,\mathrm{d}A$$

作用在整个面积 A 上的总压力，可以通过积分 $\mathrm{d}p$ 求得，即

$$p_{总}=\int_A p\,\mathrm{d}A=\gamma\int_A h\,\mathrm{d}A$$

由于

$$h=y\sin\alpha$$

所以

$$p_{总}=\gamma\sin\alpha\int_A y\,\mathrm{d}A$$

积分 $\int_A y\,\mathrm{d}A$ 是面积 A 对 Ox 轴的静面矩，如果面积 A 的形心 C 点的 y 坐标为 y_C，那么

$$\int_A y\mathrm{d}A=y_C A$$

因此

$$p_{总}=\gamma y_C\sin\alpha A=\gamma h_C A \tag{3-29}$$

式中 $h_C=y_C\sin\alpha$ 是形心点 C 的淹深。式(3-29)表明：静止液体作用在平面上的总压力等于平面形心点处的表压力 γh_C 与平面面积 A 的乘积。

总压力的作用点亦称为压力中心。根据理论力学中"平行力系中的诸力对某轴的力矩之和等于合力对该轴的力矩"可得

$$p_{总}\,y_D=\int_A y\,\mathrm{d}p \tag{3-30}$$

y_D 是压力中心 D 的 y 坐标。因为

$$\mathrm{d}p_{总}=\gamma y\sin\alpha\,\mathrm{d}A$$

$$p_{总}=\gamma y_C\sin\alpha A$$

则式(3-30)可以写成

$$\gamma y_C\sin\alpha A\,y_D=\gamma\sin\alpha\int_A y^2\mathrm{d}A \tag{3-31}$$

上式中 $\int_A y^2\mathrm{d}A$ 为面积 A 对 Ox 轴的惯性矩，用 J_x 表示，故上式可整理成

$$y_D=\frac{J_x}{Ay_C} \tag{3-32}$$

为方便起见，根据惯性矩的平行移轴公式 $J_x=J_C+y_C^2A$，将面积 A 对 Ox 轴的惯性矩 J_x 用 A 对通过其形心点 C 且平行于 Ox 轴线的惯性矩 J_C 替换，于是式(3-32)又可变成

$$y_D=y_C+\frac{J_C}{Ay_C} \tag{3-33}$$

由于 J_C 总是大于零的，因此 $y_D>y_C$。也就是说压力中心 D 总是位于形心点 C 的下方。

以上求出了压力中心的坐标 y_D，一般情况下还需求出坐标 x_D 才能完全确定其位置。求 x_D 的方法与求 y_D 的方法一样。由于常见的平面都具有对称性，若面积 A 具有平行于 y 轴的对称轴，则 $x_D=x_C$，即压力中心与形心点具有相同的 x 坐标。

例 3-4　作用在平面上的液体总压力

已知：如图 3.19 所示，一封闭水箱内盛有水，水自由面绝对压力 $p_A=10.92\times10^4\mathrm{N/m^2}$，矩形闸门 AB 的倾斜面长度 $h=0.5\mathrm{m}$，宽 $b=1\mathrm{m}$，闸门顶端淹深 $H=1\mathrm{m}$，闸门与水平面之间的交角 $\alpha=30°$。求作用在闸门上的总压力及其作用点与闸门顶端 A 点间的距离 s。

解：由于闸门的外面有大气压力作用，故水作用在闸板上的总压力等于闸门内面上形心点

的表压力 p_C 与板面积 A 的乘积。

闸门内面上形心点的表压力为

$$p_C=p_A-p_a+\gamma\left(H+\frac{h}{2}\sin\alpha\right)=1.89\times10^4\text{N/m}^2$$

作用在闸门上的总压力 $p=p_CA=9\,450\text{N}$

由于水自由面上的压力不等于大气压力，不同于本节推导式(3-32)时自由面上压力为大气压力的情况，故不能直接应用式(3-33)求压力中心。为此，想象在水箱中自由面上再加一层水(见图 3.20)，这层水的自由面上的压力为大气压力，它使原来自由面上的压力仍然为 p_A。显然，这两种情况下水在闸门上的压力分布完全一样，故作用在闸门上的总压力及其作用点也相同，对后一种情况，可以用式(3-33)计算总压力作用点。

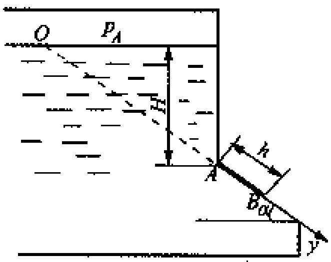


图 3.19

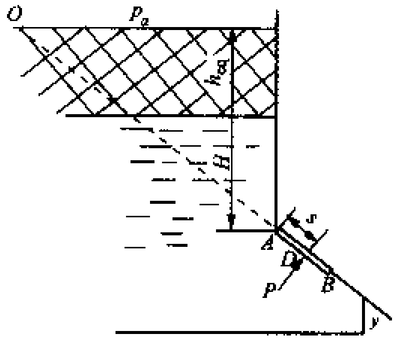


图 3.20

由静力学基本方程可以得出这层水的厚度

$$h_{eq}=\frac{p_A-p_a}{\gamma}=0.806\text{m}$$

坐标原点取在新的自由面上，形心点的 y 坐标及惯性矩表达如下：

$$y_C=\frac{h_{eq}+H}{\sin\alpha}+\frac{h}{2}$$

$$J_C=\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\eta^2\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{bh^3}{12}$$

把它们代入式(3-33)，得

$$y_D-y_C=\frac{J_C}{Ay_C}=\frac{\dfrac{bh^3}{12}}{bh\left(\dfrac{h_{eq}+H}{\sin\alpha}+\dfrac{h}{2}\right)}=0.005\,4\text{m}$$

总压力作用点 D 在形心点 C 之下，故它与 A 点距离为

$$s=\frac{h}{2}+y_D-y_C=0.255\,4\text{m}=255.4\text{mm}$$

2. *均质流体作用在曲面上的液体总压力*

工程上会遇到各种曲面受均质流体压力的作用。由于静压力垂直于它的作用面，因此，作用在曲面上各点的压力方向都不相同。与计算作用在平面上的总压力不同，在求总压力时，不能简单地对它们求积分而得。限于教材篇幅，本节仅对二元曲面上总压力的计算方法进行讨论(这些方法也可以推广到三元曲面)。

图 3.21 所示的二元曲面的面积为 A，其母线旋转轴平行于 y 轴。在面积 A 上任意取一

点，该点淹深为 h，压力为 p，作用在该点处微元面积 dA 上的总压力为

$$dp=\gamma h dA$$

把 dp 分解为 x 方向的两个分量，然后分别对它们积分。

1）总压力的水平分力

设 α 为微元面积 dA 的法线与 x 轴之间的交角，则作用在微元面上的水平分力为

$$dp_x=dp\cos\alpha=\gamma h dA\cos\alpha$$

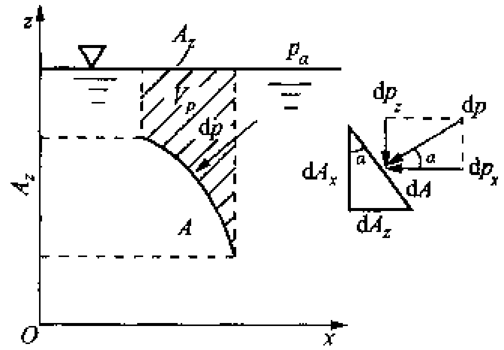


图 3.21

由于 $dA\cos\alpha=dA_x$，总压力的水平分力为

$$p_x=\int_{A_x}dp_x=\gamma\int_{A_x}h dA_x=\gamma h_C A_x \tag{3-34}$$

式中 A_x 是曲面 A 在垂直于 x 轴的 yOz 平面上的投影面积，h_C 是 A_x 的形心点淹深。式(3-34)表明，均质流体作用在曲面上总压力的水平分力大小等于其作用在该曲面的投影面 A_x 上的总压力。水平分力 p_x 的作用线位置的求法与作用在平面上的液体总压力相同。

2）总压力的垂直分力

作用在微元面上的垂直分力为 $dp_z=\gamma h dA\sin\alpha$，而 $dA\sin\alpha=dA_z$，故总压力的垂直分力为

$$p_z=\int_{A_z}dp_z=\gamma\int_{A_z}h dA_z=\gamma h_C A_z \tag{3-35}$$

积分 $\int_{A_z}h dA_z$ 是曲面 A 上方的阴影体积(见图 3.21)，这个体积称为压力体，记为 V_p，故式(3-35)可以表示为

$$p_z=\gamma V_p \tag{3-36}$$

该式表明，均质流体作用在曲面总压力的垂直分力等于压力体的液重。垂直分力 p_z 的作用线通过压力体的形心。

3）总压力

总压力的大小为

$$p=\sqrt{p_x{}^2+p_z{}^2} \tag{3-37}$$

总压力与垂线之间的交角 θ 由下式确定：

$$\tan\theta=\frac{p_x}{p_z} \tag{3-38}$$

水平分力 p_x 的作用线通过投影面积 A_x 的压力中心，垂直分力 p_z 的作用线通过压力体 V_p 的形心，则总压力 p 的作用线必然通过上述两天作用线的交点，它的方向由式(3-38)确定。总压力作用线与曲面的交点就是总压力的曲面上的作用点。

例 3-5　作用在曲面上的液体总压力

已知：在贮水容器垂直壁的下面，有一 1/4 圆柱面形的部件(见图 3.22)，该部件的长度 $l=0.8\text{m}$，半径 $R=0.4\text{m}$，水深 $H=1.2\text{m}$。试求水作用在部件上的总压力。

解：作用在曲面 bc 上的总压力的水平分力就等于作用在它的投影平面 ac 的总压力，故

$$p_x=\gamma h_C A_{ac}=\gamma\left(H-\frac{R}{2}\right)Rl=3\,138\text{N}$$

垂直分力等于压力体 V_{bcfe} 的液重

$$p_z=\gamma V_{bcfe}=\gamma\left(RlH-\frac{\pi}{4}R^2l\right)=2\,780\text{N}$$

本例图 3.22 表明，压力体的概念只是用于表明垂直分力的大小。压力体空间并不一定全部由液体占据，它可以全部由液体占据，也可以不由液体占据或只是由部分液体占据。

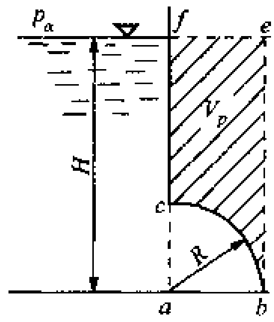


图 3.22

总压力的大小

$$p=\sqrt{{p_x}^2+{p_z}^2}=4\,192\text{N}$$

总压力与垂线之间的夹角

$$\theta=\arctan\frac{p_x}{p_z}=48°28'$$

例 3-6　作用在曲面上的液体总压力

已知：图 3.23 所示为一贮水容器，容器壁上有三个直径 $d=0.5$m 的半球形盖，如果 $h=2$m，$H=2.5$m，试求液体作用在每个半球形盖上的总压力。

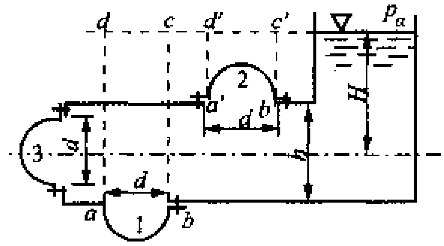


图 3.23

解：这里的三个半球形盖都是三元曲面，但求其总压力可以用前面推导的公式。底盖因其左、右两半部分的形状及受力部是对称的，故水平分力为零，其总压力的垂直分力为

$$p_{z_1}=\gamma v_{abcd}=\gamma\left[\frac{\pi d^2}{4}\left(H+\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3\right]=7\,060\text{N}$$

即，$p_1=p_{z_1}=7\,060$N，方向向下。

顶盖与底盖一样，水平分力为零，其总压力就等于垂直分力，它的大小为

$$p_2=p_{z2}=\gamma V_{a'b'c'd'}=\gamma\left[\frac{\pi d^2}{4}\left(H-\frac{h}{2}\right)-\frac{\pi d^3}{12}\right]=2\,567\text{N}$$

方向向上。

侧盖上总压力的垂直分力等于盖下半部分压力体与上半部分压力体之差的液重，即为半球体积之水重：

$$p_{z_3}=\gamma V_{半球}=\gamma\frac{\pi d^3}{12}=321\text{N}$$

方向向下。侧盖 x 方向分力可由式(3-34)求出

$$p_{x_3}=\gamma h_C A_x=\gamma H\frac{\pi d^2}{4}=4\,814\text{N}$$

侧盖前、后是对称的，故

$$p_{y_3}=0$$

总压力及其与垂线的夹角分别为

$$p=\sqrt{p_{x_3}^2+p_{z_3}^2}=4\,824\text{N}$$

$$\tan\theta=\frac{p_{x_3}}{p_{z_3}}=14.997$$

$$\theta=86°11'$$

3.2　理想流体运动的基本方程——流体动力学基础

在第 2 章中已经对流体运动的研究方法和基本概念进行了论述，本节讨论的主要内容是从物理学和理论力学的基本定律，包括质量守恒定律、牛顿第二定律、动量定理、动量矩及能量守恒和转换定律出发，推导理想流体运动的基本方程式：连续方程、动量方程和动量矩方程。并举例说明它们的应用。

3.2.1　理想流体运动的分类

根据欧拉法所给的有关运动参数，将流体运动进行分类如下。

(1) 若运动参数与时间无关，则称此流动为定常流动；反之，称为非定常流动。

对于定常流动，流场中速度可表示为

$$u = u(x,y,z),\ v = v(x,y,z),\ w = w(x,y,z) \tag{3-39}$$

压力和密度可表示为

$$p = p(x,y,z),\ \rho = \rho(x,y,z) \tag{3-40}$$

此时，各运动参数对时间的偏导数等于零，即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3-41}$$

(2) 以空间为标准：按照流场空间自变量的数目可将流体流动分为一维流动、二维流动或三维流动。

第 2 章已经指出，采用欧拉法时流体质点加速度是用随体导数表示的。速度是复合函数。按复合函数的求导法则，加速度在 x 方向的分量为

$$a_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{3-42}$$

由于运动质点的坐标对时间的导数等于该质点的速度分量，即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=w$$

故

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

同理

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \tag{3-43}$$

$$a_z=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}$$

用矢量表示，则有

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} \tag{3-44}$$

式中$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ 是微分算子符号。

如同第 2 章已经论述过的，用欧拉法描述流体的运动时，流体质点的加速度由局部加速度 $\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}$ 和位变加速度 $(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$ 组成。它们分别描述了在特定的空间点上，速度随时间的变化率和由于流场中的速度不均匀，流体质点空间位置的变化所产生的速度变化率。两部分之和 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}$ 称为全加速度。

其他的运动参数也是复合函数，在此不再赘述。

3.2.2 流体运动分析

1. 系统与控制体

1）系统

在流体力学中，系统是指某一确定流体质点集合的总体，系统以外的环境称为外界。分隔系统与外界的界面，称为系统的边界。系统将随系统内的质点一起运动，系统内的质点始终包含在系统内，而边界的形状和所包围空间的大小可随运动而变化。系统与外界没有质量的交换，但可以有力的相互作用、能量（热和功）的交换。

但是，流体力学感兴趣的是求得流体物理量的分布，把系统作为研究对象很不方便，故需要欧拉描述，即控制体的概念。

2）控制体

所谓控制体是指流场中某一确定的空间区域，控制体的边界面称为控制面。控制体的形状和位置可以根据所研究的问题任意选择。一旦控制体选定后，它相对于参考坐标系就是固定不动的。在流体流动过程中，流体可以穿过控制面流进或流出控制体，在控制面上，内、外流体可以相互施加力，可以进行能量交换。显然，控制体是以空间变量描述的，其相应的描述方法是欧拉法。

2. 流体微团运动分析

取一流体微团，通过对其运动分解来揭示流体微团运动的组成，从而深刻了解流场的特点。从理论力学知道，刚体的一般运动可以分解为两部分：一是刚体上任意一参考点的平移运动；另一是刚体绕通过该参考点的瞬时轴的旋转运动。流体微团不是刚体，在运动过程中它会发生变形。因此，流体中任意一微团的运动可分解为四部分：微团上任意一参考点的平移运动；绕通过该参考点的瞬时轴的旋转运动；线变形引起的运动；角变形引起的运动。

下面进行定量分析。从任意一流体微团在某一瞬时的状况出发，在这流体微团上选取 $M(x,y,z)$ 点作为参考点，该点速度分量为 u,v,w。假设在这流体微团上与点 M 的相邻的一点 $A(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z)$ 上的速度分量为 u_A，v_A，w_A，则按泰勒级数展开，并略去二阶以上的微量后，A 点速度分量可写成

$$\left.\begin{aligned}
u_A &= u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z\\
v_A &= v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z\\
w_A &= w+\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z
\end{aligned}\right\} \tag{3-45}$$

为了清楚地显示出上述分析的速度的四个部分，将式(3-45)进行改写，把第一式加、减$\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y$和$\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}z$后加以重新组合，可得到

$$u_A = u + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$

对第二、三式进行类似改写后，可得

$$v_A = v + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}z$$

$$w_A = w + \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}x$$

为了简明起见，引入下列符号：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3-46}$$

$$\left.\begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \theta_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \theta_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3-47}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3-48}$$

于是，式(3-45)变为

$$\left.\begin{aligned} u_A &= u + \varepsilon_x \mathrm{d}x + (\theta_y \mathrm{d}z + \theta_z \mathrm{d}y) + (\omega_y \mathrm{d}z - \omega_z \mathrm{d}y) \\ v_A &= v + \varepsilon_y \mathrm{d}y + (\theta_z \mathrm{d}x + \theta_x \mathrm{d}z) + (\omega_z \mathrm{d}x - \omega_x \mathrm{d}z) \\ w_A &= w + \varepsilon_z \mathrm{d}z + (\theta_x \mathrm{d}y + \theta_y \mathrm{d}x) + (\omega_x \mathrm{d}y - \omega_y \mathrm{d}x) \end{aligned}\right\} \tag{3-49}$$

这就是流体微团的速度分别在 xyz 三坐标上分解为四部分的表达式。等号右端第一项为参考点 M 平移的速度，后三项的意义讨论如下。

设所考虑的流体微团在 t 瞬间是一个平行六面体，Δt 时刻后，它的位置、形状和体积都发生了变化。为了简明起见，现在只分析六面体的一个平面的运动情况(其他平面的情况可按同样原则类推)。

分析平面 $MBAC$，它的边长分别为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，四个角点的速度如图 3.24 所示。

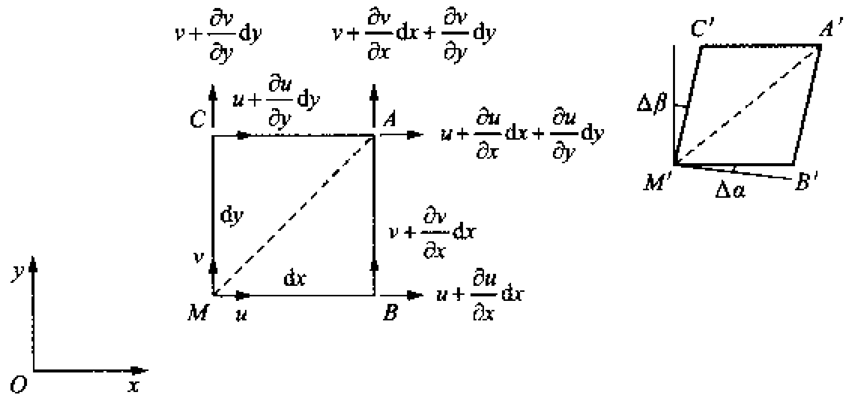


图 3.24 流体微团六面体的运动分析

假设 Δt 时刻后线段 CA 的长度变化为 Δl_x，略去高阶微量后有

$$\Delta l_x=\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\Delta t-\left(u+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\Delta t=\frac{\partial u}{\partial x}dx\,\Delta t$$

仅由于 CA 发生线变形而在点 A 产生的 x 方向的速度为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta l_x}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}dx=\varepsilon_x dx \tag{3-50}$$

它就是式(3-49)第一式中的第二项。同样可以证明，第二式、第三式中的第二项分别代表线变形在点 A 所发生的 y 和 z 方向的速度。$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$ 分别称为 x,y,z 方向的线变形率。

再来分析微团的角变形和旋转运动。由于点 M 和点 B 的 y 方向速度分量不一样，以及点 M 和点 C 的 x 方向速度分量不一样，Δt 时刻后线段 MB 和线段 MC 的方向会有所改变。现在假设 MB 逆时针旋转了 $\Delta\alpha$ 角度，MC 顺时针旋转了 $\Delta\beta$ 角度，因为 Δt 是个很小的时间增量，因此 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\beta$ 都很小，略去高阶微量后

$$\Delta\alpha=\tan\Delta\alpha=\frac{\left(v+\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)\Delta t-v\Delta t}{dx}=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta t$$

$$\Delta\beta=\tan\Delta\beta=\frac{\left(u+\frac{\partial u}{\partial y}dx\right)\Delta t-u\Delta t}{dy}=\frac{\partial u}{\partial y}\Delta t$$

线段 MB 和 MC 的旋转使夹角 $\angle CMB$ 所产生的变化是 $\Delta\alpha+\Delta\beta$，而夹角 $\angle CMA$ 的变化可以被认为是 $(\Delta\alpha+\Delta\beta)/2$。仅由于 $\angle CMA$ 的角度变化在点 A 所产生的 x 方向的速度是

$$\frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\alpha+\Delta\beta}{\Delta t}\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy=\theta_z dy \tag{3-51}$$

它就是式(3-49)第一式中第三项的后半部分，前半部分 $\theta_y dz$ 是微团在 xOz 平面内的角变形在点 A 所产生的 x 方向的速度。用同样的方法可得，式(3-49)另两式中的第三项分别是微团的角变形在点 A 所产生的 y 方向和 z 方向的速度。$\theta_x,\theta_y,\theta_z$ 分别是流体微团在三个坐标平面内的变形角速度。若把它们作为空间矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 在三个坐标轴方向的投影，则

$$\boldsymbol{\theta}=\theta_x\boldsymbol{i}+\theta_y\boldsymbol{j}+\theta_z\boldsymbol{k} \tag{3-52}$$

称为剪切变形角速度。

由于流体微团有变形，所以微团各部分的旋转角度不同。一般用相互垂直的两条直线旋转角度的平均值作为整个微团的旋转角度。可以认为微团的旋转角度是线段 MB 和线段 MC

的旋转角度的平均值$(\Delta\alpha-\Delta\beta)/2$。此处，设逆时针旋转角度为正。把仅由于微团的旋转在点A所产生的x方向的速度表示为

$$-\frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\alpha-\Delta\beta}{\Delta t}\right)\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}y=-\omega_z\mathrm{d}y \tag{3-53}$$

此即式(3-49)第一式中第四项的后半部分，这一项的前半部分$\omega_y\mathrm{d}z$是微团在xOz平面内的旋转在A点所产生的x方向的速度。显然，式(3-49)另两个式子中的第四项分别是由于微团的旋转运动在点A所产生的y方向和z方向的速度。$\omega_x,\omega_y,\omega_z$分别是微团在三个坐标平面内旋转运动的角速度。把它们作为空间矢量$\boldsymbol{\omega}$在三个坐标轴方向的投影，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}&=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}\\&=\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\\&=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{V}\end{aligned} \tag{3-54}$$

$\boldsymbol{\omega}$称为旋转角速度，它等于速度矢量的旋度的1/2。(关于旋度的概念请参考有关数学书籍。)

至此，流体的一般运动已经被分解成平移、线变形、角变形和旋转四部分运动。在黏性流体中，由黏性产生的正应力与线变形率的大小有关；剪切应力与剪切变形角速度有关；而按旋转角速度是否等于零加以分类的流动又具有不同的性质。因此，把速度分解后，就有可能根据速度的组成情况来分析流动的某些性质。

3. 流体运动的无旋流动和有旋流动

如果流体流动时所有流体微团仅作平移和变形运动，没有旋转运动，则此种流动称为无旋流动(或势流)；若流体微团有旋转运动，则称为有旋流动。显然，当流体作无旋流动时

$$\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$$

当流体作有旋流动时，$\omega_x,\omega_y,\omega_z$三者中至少有一个不等于零。

需要注意的是，有旋流动与无旋流动是根据流体微团的旋转角速度是否等于零这一特征来划分的，与流体微团的运动轨迹是直线还是曲线毫无关联。因此，绝不能根据迹线的形状来判断流动是否有旋。

3.2.3 连续性方程

流体在流动过程中应该遵循质量守恒定律，且不违背连续介质假设，连续性方程就是流体上述性质的数学表达形式。

从充满运动流体的空间里取一边长为$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$的微元六面体(图3.25)，它的形心在点$M(x,y,z)$，在某一瞬时，点$M$速度的三个分量为$u,v,w$，密度为$\rho$。在平面$ABCD$的形心点$m$处，$x$方向速度分量为$u-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}$，密度为$\rho-\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}$；在平面$EFGH$的形心点$m'$处，$x$方向速度分量为$u+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}$，密度为$\rho+\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}$。由于六面体很小，故点$m$和点$m'$的速度和密度可以分别被看作是平面$ABCD$和平面$EFGH$上的平均速度和密度。于是，单位时间内由平面

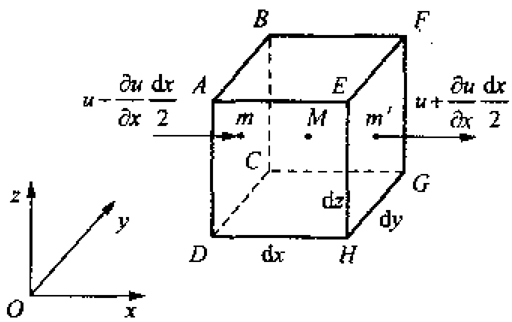


图3.25

$ABCD$流入六面体空间的流体质量为

$$\left(\rho-\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\left(u-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

单位时间内由 $EFGH$ 流出六面体空间的流体质量为

$$\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

单位时间内由这一对平面净流入的流体质量是上述两者之差，即

$$-\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+u\frac{\partial\rho}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

类似地，单位时间内由另两对平面净流入的流体质量分别为

$$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ 和} -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

在一般情况下密度是随时间变化的，如果点 M 的密度在 Δt 时间内由 ρ 变为 $\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta t\right)$，那么在单位时间内，六面体空间里流体质量的增加量为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta t\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\Delta t}\right]=\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

流体是连续介质，并且质量又是守恒的，所以，由于密度变化增加的质量就等于从六面体六个表面净流入的质量，由此得到

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \tag{3-55}$$

用微分算子表示为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{3-56}$$

这就是可压缩流体作非定常流动时的连续性方程。

对于定常流动，$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$，以上两式成为

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \tag{3-57}$$

或

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{3-58}$$

此时由六面体表面净流入的质量流量为零。

对于不可压缩流体，ρ 是常数，故连续性方程简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3-59}$$

或

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0 \tag{3-60}$$

上式表明六面体表面净流入的体积流量为零。

对于一元管流，由于流体不可能穿越流管壁面流进或流出，因此，在定常流动中，通过流束任意两个有效断面的质量流量应该相等，故连续性方程可写为

$$\int_{A_1}\rho V\mathrm{d}A=\int_{A_2}\rho V\mathrm{d}A \tag{3-61}$$

若流体不可压缩，则

$$\int_{A_1} V\mathrm{d}A = \int_{A_2} V\mathrm{d}A \tag{3-62}$$

引用平均速度并省去上面的一横，则得

$$V_1A_1 = V_2A_2 \tag{3-63}$$

其中，V_1、V_2 分别是有效断面 A_1，A_2 的平均速度。

用同样的方法也可以推导出柱坐标中的连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho V_r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho V_\theta)}{r\partial\theta}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}+\frac{\rho V_r}{r}=0 \tag{3-64}$$

对于不可压缩流体，则有

$$\frac{\partial(V_r)}{\partial r}+\frac{\partial(V_\theta)}{r\partial\theta}+\frac{\partial(V_z)}{\partial z}+\frac{V_r}{r}=0 \tag{3-65}$$

1. *理想流体的运动微分方程*

理想流体是一种假想的、不具有黏性的流体。对于理想流体，只要根据达朗贝尔原理把与加速度相对应的惯性力作为质量力的一部分，则对静止流体的讨论所用到的所有条件依然成立。所以，理想流体中的应力具有静止流体所具有的两个特征，即应力仅仅是沿着作用面内法线方向的压力，而压力的大小又与作用面的方向无关。

本节依据牛顿第二定律运动微分方程，推导运动的理想流体的运动微分方程。

从运动的理想流体中取出一边长为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 的六面体流体微团，则作用在该流体微团上的力仅仅是质量力和垂直于作用面的应力。假定流体微团的形心在点 $M(x,y,z)$，并且点 M 的应力为 p，质量力为 f_x，f_y，f_z，密度为 ρ，则作用在微团表面上的 x 方向的应力如图 3.26 所示。

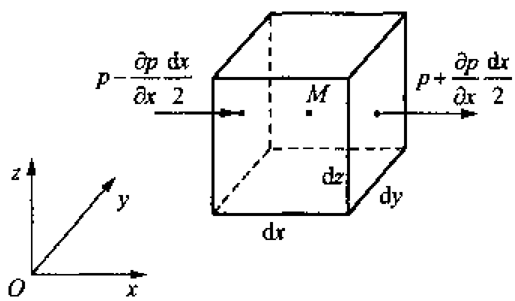


图 3.26　微团表示 x 方向的压力示意图

在一般情况下，流体微团上是有加速度的。假设形心点 M 加速度的三个分量为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$。根据牛顿第二定律，在 x 方向流体微团的运动应满足下列关系：

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+f_x\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

整理后，得到

同理，对 y，z 方向得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}&=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}&=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{3-66}$$

这三个方程可以写成下列矢量形式：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\,\nabla p \tag{3-67}$$

这就是理想流体的运动微分方程。又称为欧拉运动方程，由欧拉在 1755 年首先提出。

按随体导数概念，欧拉运动方程又可以写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{3-68}$$

或

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p\tag{3-69}$$

在圆柱坐标系中，欧拉运动方程的形式如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}+\frac{V_\theta{}^2}{r}=f_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\\ \frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}+\frac{V_rV_\theta}{r}=f_\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial \theta}\\ \frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{3-70}$$

欧拉方程(3-68)与连续性方程(3-67)合在一起，是用来求解理想流体运动问题的一组基本方程。当质量力和密度给定时，四个方程中只有四个未知变量 u,v,w,p，因此，这一组方程是封闭的。到此，求解理想流体运动的问题已归结为在特定的初始条件和边界条件下，求解(3-67)和(3-68)组成的微分方程组的数学问题。但是，由于数学上的困难，目前还仅仅只能针对一部分问题求出方程组的解。

2. 流体运动微分方程的几种特殊形式

1) 兰姆方程

为便于对方程求解，把运动方程改写成另一种形式，即把式(3-68)第一式左边加、减 $v\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $w\frac{\partial w}{\partial x}$，整理后得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ &=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)+2(w\omega_y-v\omega_z)\\ &=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right)+2(w\omega_y-v\omega_z)\end{aligned}$$

于是，式(3-68)第一式可以写成

$$fx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right)=2(w\omega_y-v\omega_z)$$

同理得

$$\left.\begin{aligned}fx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right)=2(w\omega_y-v\omega_z)\\ fy-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}\right)=2(u\omega_z-w\omega_x)\\ fz-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}\right)=2(v\omega_x-u\omega_y)\end{aligned}\right\}\tag{3-71}$$

写成矢量形式为

$$\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p-\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}-\nabla\left(\frac{\boldsymbol{V}^2}{2}\right)=2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V})\tag{3-72}$$

式(3-71)或式(3-72)称为兰姆方程。兰姆方程与欧拉方程没有什么本质区别，它们仅仅是表

达形式不同。兰姆方程的特点是方程中明显出现旋转角速度 ω_x，ω_y，ω_z。

2) 纳维-斯托克斯方程(动量守恒方程)

上述运动方程是对理想流体而言,在推导中没有考虑流体黏性力。针对黏性流体分析可知,在流体微团的表面上所受外力除了质量力分量外,还有切应力 $\tau=\mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$。利用第 2 章的分析结果,可以得出黏性流体的运动微分方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\upsilon\nabla^2 V$$

式中

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},\ \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3-73}$$

这就是著名的纳维-斯托克斯方程,简记为 N-S 方程。它是法国科学家纳维(M. Navier)于 1823 年提出,由英国科学家斯托克斯(G. G. Stokes)1845 年完善充实而得,也称为黏性流体的动量守恒方程。式(3-73)左边代表单位质量流体上作用的惯性力(质量乘以加速度);右边第一项表示单位质量流体的质量力;第二项代表由压力梯度引起的力;第三项代表黏性产生的摩擦力,即黏性力。N-S 方程表示了这些力的平衡关系,其中包含 4 个变量 u,v,w 和 p,与连续性方程联立,构成封闭方程组,理论上可以求解。实际上,由于数学上的原因,只有极少数情况下才可以求得分析解。

3.2.4 理想流体的伯努利方程

前已述及,理想流体的运动微分方程仅在某些特定的条件下才能求解。下面将所讨论的问题限制在三个条件下,即(1)流动是定常的,即,$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$,$\dfrac{\partial \rho}{\partial t}=0$;(2)作用在流体上的质量力是有势的,即 $f=-\nabla\pi$;(3)流体是正压性的,即密度只是压力的函数,可以表示为 $\rho=\rho(p)$。此时存在着一个压力函数 $p_F(x,y,z,t)$,其定义为

$$p_F=\int\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p$$

或

$$\nabla p_F=\frac{1}{\rho}\nabla p$$

对于正压性流体,上式是可以积分的,实际上正压性流体是存在的。例如,不可压缩流体,$\rho=$常数;等温流动中的可压缩流体,$p=\rho RT_0$;它们都是正压性流体。压力函数分别为

$$p_F=\frac{p}{\rho}\ \text{和}\ p_F=RT_0\ln p$$

密度不只是压力的函数的流体,称为斜压性流体。对这样的流体,压力函数 p_F 是不存在的。

等熵流动中的可压缩流体,$\rho=C(\psi)p^{1/K}$,其中 C 是流线的函数,它沿同一流线是常数,在不同的流线上可以是不同的常数值,称为拟正压性流体。

在以上三个条件下,兰姆方程(3-72)可写成

$$\nabla\left(\pi+p_F+\frac{V^2}{2}\right)=-2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}) \tag{3-74}$$

现在,分别在无旋流动和有旋流动的情况下求解方程(3-74)。

1. 拉格朗日积分

在无旋流动时,$\omega=0$,故式(3-74)变为

$$\nabla\left(\pi+p_F+\frac{V^2}{2}\right)=0$$

由此得知，在整个流场中

$$\pi+p_F+\frac{V^2}{2}=C$$

上式常称为拉格朗日积分式。

2. 伯努利积分

在有旋流动时，$\omega\neq0$。现将式(3-74)两边分别点乘一个沿流线的微位移矢量

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$$

根据矢量叉乘的性质，式(3-74)右端的矢量$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V})$与矢量$\boldsymbol{V}$垂直；又根据流线的性质，d$\boldsymbol{s}$与$\boldsymbol{V}$的方向相同，所以，$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V})$与d$\boldsymbol{s}$垂直。因此，

$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$$

于是，有

$$\nabla\left(\pi+p_F+\frac{V^2}{2}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$$

或

$$\mathrm{d}\left(\pi+p_F+\frac{V^2}{2}\right)=0$$

这里的微分是沿流线取的。可见，沿流线

$$\pi+p_F+\frac{V^2}{2}=C$$

这就是伯努利积分式。从形式上看，拉格朗日积分式与伯努利积分式完全相同，所不同的是：前者在整个流场上都成立，而后者仅沿流线才成立。

3. 伯努利方程

将限制条件进一步细化，如在限制条件(2)中，质量力仅仅是重力，即$f_x=0$，$f_y=0$，$f_z=-g$，则力势函数$\pi=gz$；在限制条件(3)中流体是不可压缩的，即$p_F=\frac{p}{\rho}$。这样，拉格朗日积分式和伯努利积分式写成

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=C$$

或

$$Z+\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}=C \tag{3-75}$$

式中积分常数C可由边界条件确定。式(3-75)还可以写成下列形式：

$$Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^{\,2}}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^{\,2}}{2g} \tag{3-76}$$

式(3-75)和式(3-76)称为伯努利方程(1738年)。

注意，使用伯努利方程时应该满足下列条件：

(1) 流体必须是理想的、不可压缩的。

(2) 流动必须是定常的。

(3) 质量力仅仅是重力。

(4) 在流动无旋时，它在整个流场上成立；在流动有旋时，它仅沿流线成立。

当速度$V=0$时，伯努利方程(3-76)就退化成静力学基本方程(3-12)。可见，静力学基本

方程可以看成是伯努利方程在流体静止时的特殊形式。

伯努利方程的物理意义和几何意义讨论如下。

物理意义：从物理角度看，方程(3-76)中的每一项均表示单位质量的流体所具有的一部分能量。第一项 z 表示单位质量流体所具有的位势能；第二项 $\frac{p}{\gamma}$ 表示单位质量流体所具有的压力势能；第三项 $\frac{V^2}{2g}$ 表示单位质量流体所具有的动能。以上三种能量之和称为总力学能。所以，伯努利方程的物理意义是：在整个流场中(无旋)或沿流线(有旋)，单位质量流体所具有的位势能、压力势能、动能之和是一个常数，或者说，总力学能是一个常数。

几何意义：从几何角度看，式(3-76)的每一项均表示一个高度，或一种水头。第一项 z 表示位置水头；第二项 $\frac{p}{\gamma}$ 表示压力水头；第三项 $\frac{V^2}{2g}$ 表示速度水头。三种水头之和又称为总水头，而前两种水头之和称为测压管水头。所以，伯努利方程的几何意义是：在整个流场中(无旋)，或沿流线(有旋)，任意点的位置水头、压力水头和速度水头之和是常数。如果把基准面作为起点，画出每一点的总水头，那么，所有水头高度线的端点应落在同一水平线上，这条水平线称为总水头线。各点测压管水头的连线称为测压管水头线，如图3.27所示。

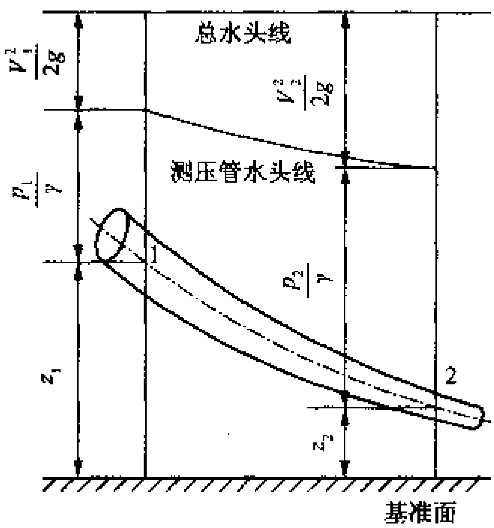


图3.27

如果质量的位势能大小可以忽略，那么，伯努利方程就可简化为

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=C$$

该式表明，若不考虑重力影响，在流体内压力低的地方速度大，压力高的地方速度小。

4. 总流的伯努利方程

在没有确定流动是有旋还是无旋的情况下，上面推导的伯努利方程只能适用于流线(或微元流束)。在工程实际中要求解决的往往是总流流动的问题。例如，流体在管道、渠道中的流动问题。由于在总流的有效断面上，各运动参数一般是变化的，因此，要将沿流线的伯努利方程推广到总流上去，就需要一定的限制条件和进行必要的修正。

急变流和缓变流。流线几乎是平行的直线的流动称为缓变流，不符合上述条件的流动称为急变流，如图3.28所示。缓变流的主要特点是：沿有效断面，$z+\frac{p}{\gamma}=$常数。这一性质可由

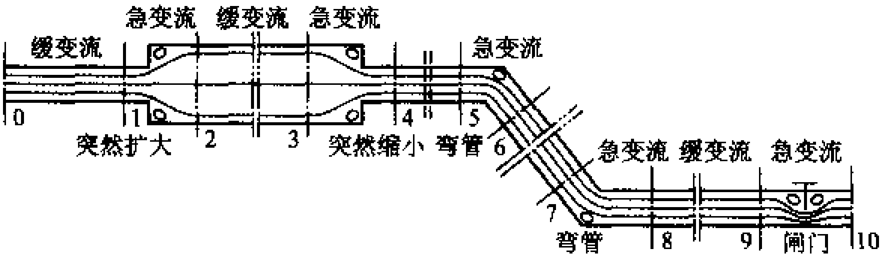


图3.28 急变流和缓变流示意图

实验得到证明。

现在推导总流的伯努利方程。考虑不可压缩流体中任意一微元流束(见图3.29),微元流束的任意两个断面为dA_1和dA_2,通过dA_1和dA_2的质量流量$\gamma V_1 dA_1$和$\gamma V_2 dA_2$应该是相等的,把它们分别乘在伯努利方程的两端,于是有

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}\right)\gamma V_1 dA_1 =\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}\right)\gamma V_2 dA_2$$

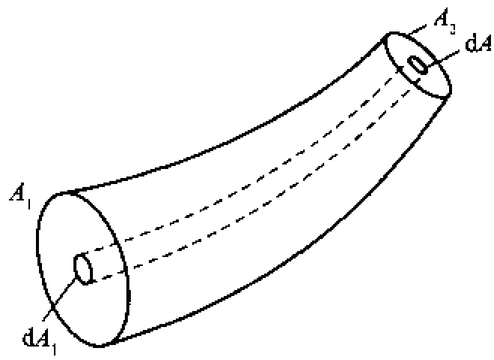


图3.29 总流中任一微元流束示意图

可见,通过dA_1,dA_2的流体所具有的总机械能也应该是相等的。将上式积分,即可得单位时间内通过总流有效断面A_1和A_2的能量之间的关系式

$$\int_{A1}\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}\right)\gamma V_1 dA_1 =\int_{A2}\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}\right)\gamma V_2 dA_2 \tag{3-77}$$

假设A_1,A_2都处在缓变流中,在这两个断面上$z+\frac{p}{\gamma}=$常数,于是,上式可以写成

$$\gamma\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)\int_{A1}V_1 dA_1+\gamma\int_{A1}\frac{V_1^2}{2g}V_1 dA_1 =\gamma\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)\int_{A2}V_2 dA_2+\gamma\int_{A2}\frac{V_2^2}{2g}V_2 dA_2$$

等式两端的最后一项,分别表示通过A_1和A_2的流体所具有的动能,把它们用平均速度$\overline{V_1}$,$\overline{V_2}$表示,同时考虑到有效断面上速度分布的不均匀性,引入动能修正系数α:

$$\alpha=\frac{1}{A}\int_A\left(\frac{V}{\overline{V}}\right)^3 dA,$$

则有

$$\gamma\int_{A1}\frac{V_1^2}{2g}V_1\,dA_1=\alpha_1\gamma\frac{\overline{V_1^2}}{2g}\overline{V_1}A_1=\alpha_1\gamma\frac{\overline{V_1^2}}{2g}Q$$

$$\gamma\int_{A2}\frac{V_2^2}{2g}V_2\,dA_2=\alpha_2\gamma\frac{\overline{V_2^2}}{2g}\overline{V_2}A_2=\alpha_2\gamma\frac{\overline{V_2^2}}{2g}Q$$

在工业管道通常的工作状态下,$\alpha=1.05\sim1.12$,一般可近似地取$\alpha=1$。于是式(3-77)可简化为

$$\gamma\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)Q+\alpha_1\gamma\frac{\overline{V_1^2}}{2g}Q=\gamma\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)Q+\alpha_2\gamma\frac{\overline{V_2^2}}{2g}Q$$

把等式两端同除以γQ,使用V_1和V_2来代表平均速度,则上式成为

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\alpha_1\frac{V_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\alpha_2\frac{V_2^2}{2g}$$

这就是总流的伯努利方程。如果取$\alpha_1=\alpha_2=1$,则它又可以写成

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g} \tag{3-78}$$

由于总流伯努利方程是在一定条件下推导出来的，因此，应用这个方程时应注意下列几点：

(1) 流体是理想、不可压缩的；流动是定常的；质量力仅仅是重力。

(2) 所取的两个有效断面一定要处于缓变流区域，但在这两个有效断面之间可以有急变流。

(3) 在所取的两个有效断面之间不能有能量输入或输出。

(4) $z+\frac{p}{\gamma}$在缓变流的同一有效断面上是常数，因此可以在断面上的任意点取值，一般取断面形心处的值较方便。

5. 伯努利方程的应用

伯努利方程在工程中的应用非常广泛，特别是用于测量流速和流量方面。

1) 毕托管

毕托管是一根弯成90°、端部开有一小孔A、侧面开有若干小孔B的套管，如图3.30所示。毕托管可用来测量流场中的点速度，故又称为测速管。测量时，将小孔A对准来流方向，则A处速度为零。

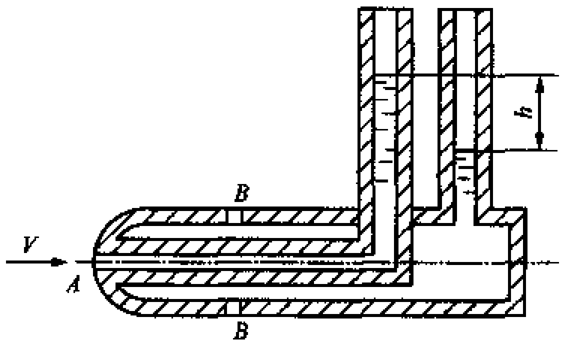


图3.30

由于毕托管的直径相对于总流断面尺寸来说是很小的，它对流场的扰动可以忽略，故侧表面B处的速度可以被认为就等于来流速度V，同时也可得到$z_A \approx z_B$。把伯努利方程(3-76)用于A和B，可以得到

$$z_A+\frac{p_A}{\gamma}=z_B+\frac{p_B}{\gamma}$$

其中$z_A+\frac{p_A}{\gamma}$是A处的测压管水头，$z_B+\frac{p_B}{\gamma}$是B处的测压管水头，设两者之差为h，则

$$V=\sqrt{2g\frac{p_A-p_B}{\gamma}}=\sqrt{2gh}$$

可见，测得h后就可以求出来流速度V。由于实际流体是黏性的，因此，用上式计算速度V时，一般还需要修正，于是

$$V=\xi\sqrt{2gh}$$

ξ称为测速管系数，它的值与特定的的毕托管的构造有关，一般接近于1。

例3-7 毕托管的应用

应用毕托管测量低速气流的速度。设气体密度为ρ，U形管测压计中液体的密度为ρ'（见图3.31），试证

$$V=\sqrt{2gh\frac{\rho'}{\rho}}$$

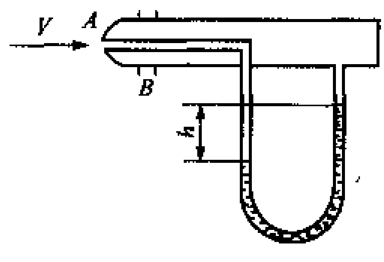


图3.31 毕托管示意图

解：根据式(3-75)，速度与压力之间的关系为

$$V=\sqrt{2g\frac{p_A-p_B}{\gamma}}$$

在 U 形管测压计中

$$p_A-p_B=(\rho' g-\rho g)h$$

因为气体的密度远小于液体的密度，即 $\rho\ll\rho'$，故可将上式中的 ρg 忽略，于是

$$p_A-p_B=\rho' gh$$

代入式(3-75)最后得到

$$V=\sqrt{2gh\frac{\rho'}{\rho}}$$

这是测量低速气流的一个实用公式。

2）文丘里流量计

文丘里流量计用于管内流量测量。如图 3.32 所示，它由收缩段和扩大段两段圆锥管构成，两段的结合部横截面面积最小，称为喉部。通过文丘里流量计的流体流动，从整体上看是一个总流，故在确定流量计中流体的压力与速度的关系时，需要用总流的伯努利方程。考虑文丘里流量计前部直管段中有效断面 1-1 和喉部有效断面 2-2。假设在这两个断面安装一个 U 形管测压计，管道中流体密度为 ρ，测压计中流体密度为 ρ'，用 V_1，p_1，A_1 和 V_2，p_2，A_2 分别表示 1-1 断面和 2-2 断面的平均速度、断面形心点压力和断面面积，并令 $\alpha_1=\alpha_2=1$。对上述两个断面列出伯努利方程

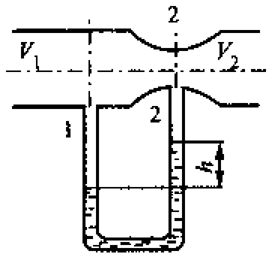


图 3.32 文丘里流量计示意图

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}$$

应用一元流动的连续性方程(3-63)

$$V_1A_1=V_2A_2$$

则可以解出 2-2 断面的平均速度

$$V_2=\sqrt{\frac{2g(p_1-p_2)}{\gamma\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$

通过流量计的体积流量

$$q_V=A_2\sqrt{\frac{2g(p_1-p_2)}{\gamma\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$

如果把压力差 p_1-p_2 用 U 形管测压计中的读数 h 来表示，则

$$p_1-p_2=h(\gamma'-\gamma)$$

于是

$$q_V=A_2\sqrt{\frac{2gh\left(\frac{\gamma'}{\gamma}-1\right)}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

考虑到流体黏性的影响，上式右端还应乘上一个修正系数 μ，最后，流量可以表示为

$$q_V = \mu A_2 \sqrt{\frac{2gh\left(\frac{\gamma'}{\gamma}-1\right)}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

μ 称为文丘里管的流量修正系数，由实验测定。

例 3-8　文丘里管的应用

水平缩放圆管如图 3.33 所示，$\gamma_1=12.684\text{N/m}^3$、流量 $q_V=20\text{m}^3/\text{min}$ 的气体通过管道由 2-2 断面喷出。假设 1-1 断面管直径 $d_1=10\text{cm}$，2-2 断面管直径 $d_2=24\text{cm}$，并且管道内气体的压缩性可以忽略。如果在 1-1 断面管壁上安装一细玻璃管，管的下端插入水中，其 $\gamma_2=9\,806\text{N/m}^3$，求细管内水柱的高度 h。

解：对 1-1 断面和 2-2 断面列出总流的伯努利方程：

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}$$

$$A_1=\frac{\pi}{4}d_1^2=0.007\,85\text{m}^2$$

$$A_2=\frac{\pi}{4}d_2^2=0.045\,2\text{m}^2$$

$$V_1=\frac{q_V}{A_1}=42\text{m/s}$$

$$V_2=\frac{q_V}{A_2}=7.3\text{m/s}$$

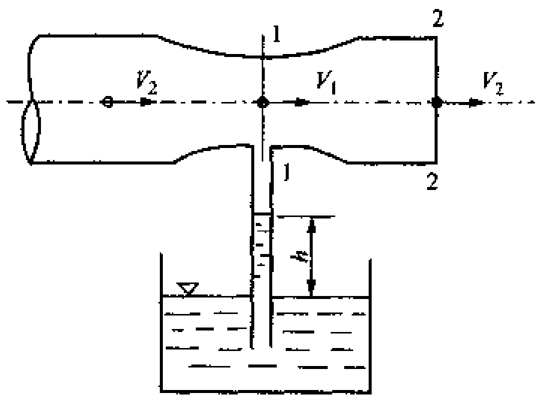


图 3.33

由题意知，$p_2=p_a$（大气压力），故

$$p_a-p_1=\gamma_1\frac{V_1^2-V_2^2}{2g}$$

细玻璃管内液柱上端的压力认为是，根据静力学基本方程

$$h=\frac{p_a-p_1}{\gamma_2}=\frac{V_1^2-V_2^2}{2g}\frac{\gamma_1}{\gamma_2}=0.113\text{m}=11.3\text{cm}$$

即，细玻璃管内水柱高度为 11.3cm。细管内的水上升是由于 1-1 断面压力小于大气压力。管内流量越大，则 1-1 断面上压力越小。在使用文丘里流量计时，需要防止喉部压力过度减小而引起液体气化。

3.2.5　动量方程和动量矩方程

工程中提出的许多实际问题不仅需要求出流体中各运动参数的变化规律，而且还需要求出流体与固体的相互作用规律。本节应用动量定理和动量矩定理，讨论运动流体与固体的相互作用问题。

1. *动量方程*

从理论力学中知道，动量定理可叙述为物体的动量对时间的导数等于施加在该物体上所有外力的矢量和，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}}{\mathrm{d}t}=\sum\boldsymbol{F} \tag{3-79}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 表示物体的动量，$\sum\boldsymbol{F}$ 表示外力的矢量和。

为了简明起见，把研究的问题限制在定常流动和流体均质不可压缩（ρ=常数）这两个条件之下。取总流中的一段空间 $abcd$ 作为控制体，控制面由有效断面 ab、cd 和总流的一段边界组成（见图3.34）。

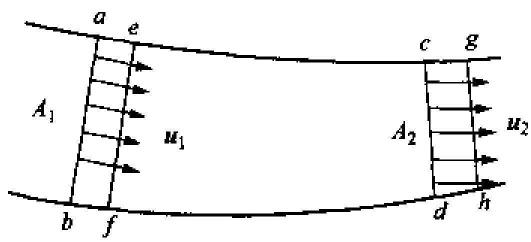


图 3.34

设 t_0 时刻处于控制体 $abcd$ 内的流体所具有的动量为 $\boldsymbol{I}_{abcdt_0}$，外界施加给这部分流体的力为 $\sum \boldsymbol{F}$。在这之后的 $t_1=t_0+\Delta t$ 时刻，这部分流体流到 $efhg$ 处，它们所具有的动量为 $\boldsymbol{I}_{efhgt_1}$。于是，这部分流体的动量变化为

$$\Delta \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_{efhgt_1} - \boldsymbol{I}_{abdct_0}$$
$$= \boldsymbol{I}_{efdct_1} + \boldsymbol{I}_{cdhgt_1} - \boldsymbol{I}_{abfet_0} - \boldsymbol{I}_{efdct_0}$$

由于所讨论的是定常流动，所以 $\boldsymbol{I}_{efdct_0}=\boldsymbol{I}_{efdct_1}$，并且 $\boldsymbol{I}_{cdhgt_1}$ 和 $\boldsymbol{I}_{abfet_0}$ 中表示时间的下标 t_0，t_1 也可以去掉，于是，

$$\Delta \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_{cdhg} - \boldsymbol{I}_{abfe}$$

由于 Δt 是个微小的时间增量，gh 断面与 cd 断面间的距离以及 ef 断面与 ab 断面间的距离都是微量，因此，可以认为体积 $cdhg$ 中流体的速度就等于 cd 断面上流体的速度 $\boldsymbol{u}_2$，体积 $abfe$ 中流体的速度就等于 ab 断面上流体的速度 $\boldsymbol{u}_1$，于是

$$\Delta \boldsymbol{I} = \rho \Delta t \int_{A_2} \boldsymbol{u}_2 u_2 \mathrm{d}A_2 - \rho \Delta t \int_{A_1} \boldsymbol{u}_1 u_1 \mathrm{d}A_1$$

根据动量定理式(3-79)，可以得

$$\rho \int_{A_2} \boldsymbol{u}_2 u_2 \mathrm{d}A_2 - \rho \int_{A_1} \boldsymbol{u}_1 u_1 \mathrm{d}A_1 = \sum \boldsymbol{F}$$

可见，单位时间内流出控制面的动量与流入控制面的动量之差等于作用在控制体内流体上的外力之和。上式等号左边的两项也可以用平均速度 $\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$ 表示，不过，此时需要乘上一个系数加以修正：

$$\rho \beta_2 \boldsymbol{V}_2 V_2 A_2 - \rho \beta_1 \boldsymbol{V}_1 V_1 A_1 = \sum \boldsymbol{F} \tag{3-80}$$

β_1、β_2 称为动量修正系数，在有效断面上的速度分布较均匀时，可取 $\beta_1=\beta_2=1$。又设通过有效断面 A_1 和 A_2 的体积流量用 q_V 表示，则式(3-80)可表示为

$$\rho q_V (\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1) = \sum \boldsymbol{F} \tag{3-81}$$

这是一个矢量方程，写成分量形式就是

$$\left.\begin{aligned} \rho q_V (u_2 - u_1) &= \sum F_x \\ \rho q_V (v_2 - v_1) &= \sum F_y \\ \rho q_V (w_2 - w_1) &= \sum F_z \end{aligned}\right\} \tag{3-82}$$

式(3-80)、(3-81)或式(3-82)称为不可压缩流体定常流动的动量方程。

不难发现，动量方程只涉及控制面上的流动参数。因此，在应用动量方程时，不需要知道运动参数在控制体内的分布规律。

2. 动量矩方程

从动量定理出发，经类似的推导过程，可得动量矩方程：

$$\rho q_V (\boldsymbol{V}_2 \times \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{r}_1) = \sum \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r} \tag{3-83}$$

式中 r_1，r_2 分别是由某一参考点到上、下游有效断面形心点的矢径(见图 3.35)，r 是由同一参考点到外力作用点的矢径。

由动量矩方程(3-83)可以看出，相对于某一参考点，单位时间内流出控制面的动量矩与流入控制面的动量矩之差等于作用在控制体内流体上的力矩之和。

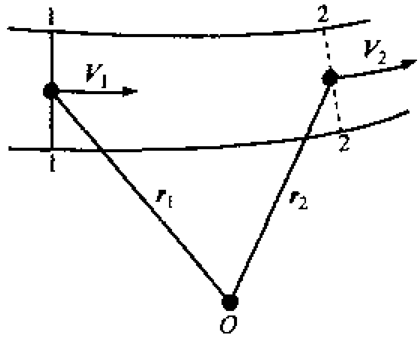


图 3.35

例 3-9 喷嘴对管子的作用力

已知：水平放置的圆截面管，管端接一喷嘴(见图3.36)，管直径 $d_1=10\text{cm}$，喷嘴直径 $d_2=4\text{cm}$，管中流动着密度 $\rho=850\text{kg/m}^3$ 的油。假设已测出断面 1 上的表压力 $p_{g1}=7\times10^5\text{N/m}^3$，求喷嘴对管子的作用力。

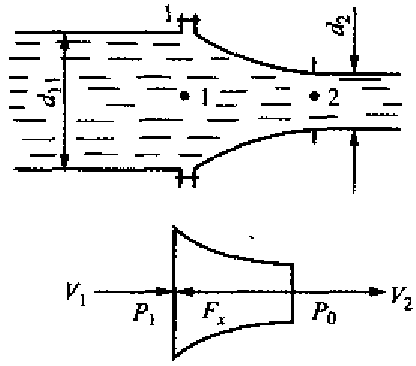


图 3.36

解：取控制体如图 3.36 所示，设喷嘴壁作用在控制体内流体上的总压力为 F_x。

喷嘴出口处压力等于大气压，故 $p_{g2}=0$，将总流伯努利方程应用于 1,2 断面，可得

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_{g_1}}{\gamma}=\frac{V_2^2}{2g}$$

根据一元流动的连续性方程：$V_1A_1=V_2A_2$，有

$$V_1d_1^2=V_2d_2^2 \text{ 或 } V_2=\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2V_1$$

代入伯努利方程后，得

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_{g_1}}{\gamma}=\frac{V_1^2}{2g}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$$

$$V_1=\sqrt{\frac{2gp_{g_1}}{\gamma[(d_1/d_2)^4-1]}}=\sqrt{\frac{2p_{g_1}}{\rho[(d_1/d_2)^4-1]}}=6.58\text{m/s}$$

$$V_2=V_1\left(\frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{d}_2}\right)^2=41.13\text{m/s}$$

$$q_V=V_1\frac{\pi}{4}\mathrm{d}_1^2=5.17\times10^{-2}\text{m}^3/\text{s}$$

对所取控制体建立动量方程

$$\sum F=p_{g1}A_1-F_x=\rho q(V_2-V_1)$$

代入数值，解得

$$F_x=3\,979.5\text{N}$$

由作用力与反作用力原理可知，喷嘴上所受到油的反作用力为 3 979.5N，方向向右。

例 3-10 射流的计算

已知：如图 3.37 所示，一股流量为 q_0 的射流以速度 V 水平射到倾斜光滑平板上后分为两股。假设重力的影响可以忽略，射流内的压力在分流前后都没有变化，求分流流量 q_1，q_2 的表达式，以及流体对板的作用力。

解：取控制体和坐标系如图所示，板对控制体内流体的作用力为 F_y。建立 x 方向和 y 方向的动量方程：

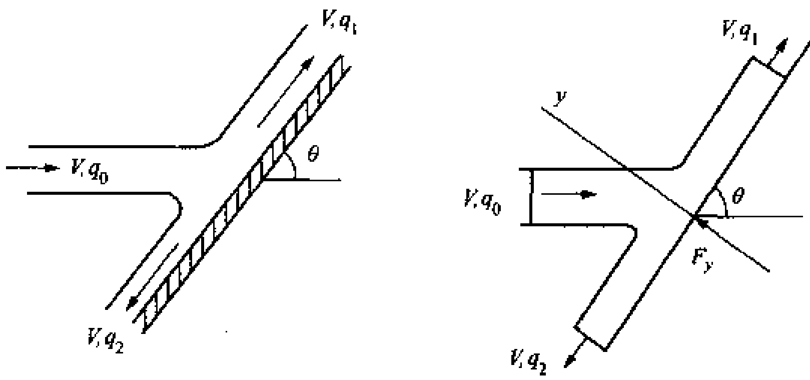


图 3.37

$$\rho(q_1V - q_2V) - \rho q_0 V\cos\theta = 0 \tag{a}$$

$$0 - (-\rho q_0 V\sin\theta) = F_y \tag{b}$$

而分流流量与来流流量又有下列关系：

$$q_1 + q_2 = q_0 \tag{c}$$

由(a),(c)式可以解出

$$q_1 = \frac{q_0}{2}(1+\cos\theta)$$

$$q_2 = \frac{q_0}{2}(1-\cos\theta)$$

由(b)式得

$$F_y = \rho q_0 V\sin\theta$$

它也是流体对板的反作用力。

习　题

1. 封闭容器如图 3.38 所示，若测压计中水银柱读数 $h=100\text{mm}$，求水面下深度 $H=2.5\text{m}$ 处的压力表读数。

2. 杯式真空计如图 3.39 所示，杯上接大气时，测压管中的液面读数为零。已知杯直径 $D=60\text{mm}$，管直径 $d=6\text{mm}$。求测压管的读数 $h=300\text{mm}$ 时杯口的真空度。

3. 如图 3.40 所示，一种酒精和水银的双液测压计，细管上端为大气压时，酒精液面高程为零。当细管管口的表压力为 p 时，酒精液面高程下降 h，试用 d_1，d_2，d_3，h 来表示 p。

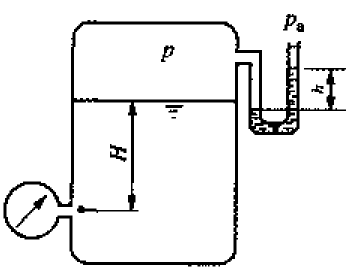


图 3.38

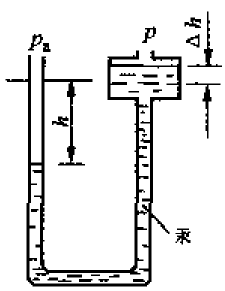


图 3.39

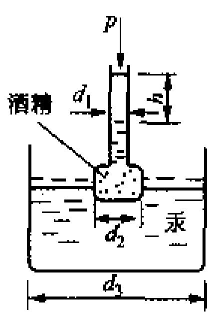


图 3.40

4. 如图 3.41 所示，在盛有油和水的圆柱形容器的盖上加载荷 $F=5\,788\text{N}$，已知 $h_1=30\text{cm}$，$h_2=50\text{cm}$，$d=40\text{cm}$，$\gamma_{油}=\rho_{油}g=7\,840\text{N/m}^3$，求 U 形管测压计中水银柱的高度差 H。

5. 两根水银测压管与盛有水的封闭容器连接(如图 3.42 所示)，若上面的测压管的水银液面距自由面的深度 $h_1=60\text{cm}$，水银柱高度差 $h_2=25\text{cm}$，下面的测压管的水银柱高度差 $h_3=30\text{cm}$，试求下面测压管水银面距自由液面的深度 h_4。

6. 容器 A 内充满水(如图 3.43 所示)，若已知 $h_1=0.25\text{m}$，$h_2=1.61\text{m}$，$h_3=1\text{m}$，试求 A 点的真空度和绝对压力。

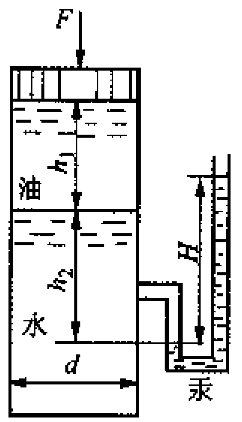


图 3.41

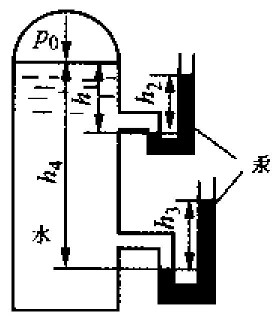


图 3.42

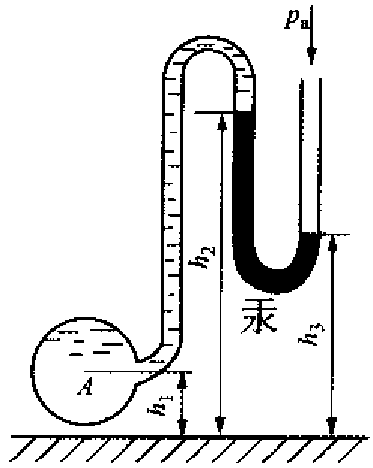


图 3.43

7. 底面积为 $a\times a=200\times200\text{mm}^2$ 的方形容器(如图 3.44 所示)，自重 $W_1=39.2\text{N}$，当它装水的高度 $h=150\text{mm}$ 时，在荷重 $W_2=245.2\text{N}$ 的作用下沿平面滑动。设容器的底与平面间的摩擦系数 $\mu=0.3$，试求不使水溢出容器的最小高度 H。

8. 在一直径 $d=300\text{mm}$，高度 $H=500\text{mm}$ 的圆柱形容器中(图3.45)，注水高度为 $h_1=300\text{mm}$，当容器绕垂直轴作等角速度旋转时，试求使水自由面刚好到达容器边缘时的转速 n。

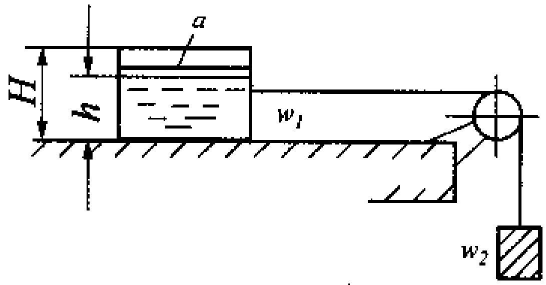


图 3.44

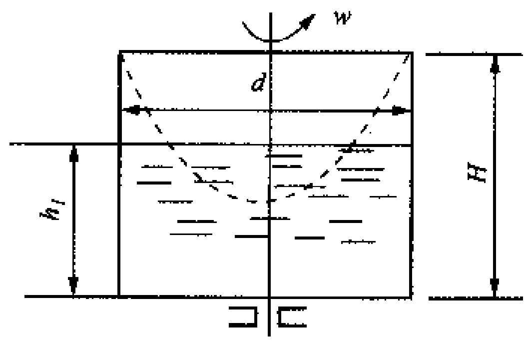


图 3.45

9. 如图 3.46 所示，一固定在离心铸造机上的铸模，已知 $d_1=0.95\text{m}$，$h=250\text{mm}$，$\gamma_{铁}=\rho_{铁}g=68\,600\text{N/m}^3$，分别求出当铸造机固定不动和以转速 $n=300\text{r/min}$ 旋转时熔融铸铁中 K 点处表压力。

10. 如图 3.47 所示，一高 $H_0=0.7\text{m}$，半径 $R=0.4\text{m}$ 的圆筒内装有 $V=0.25\text{m}^3$ 的水。假设，圆筒以角速度 $\omega=10/\text{s}$ 绕垂直轴旋转，并且自由液面上的压力为大气压力，顶盖重 $W=49\text{N}$，试求作用在顶盖螺栓上的力。

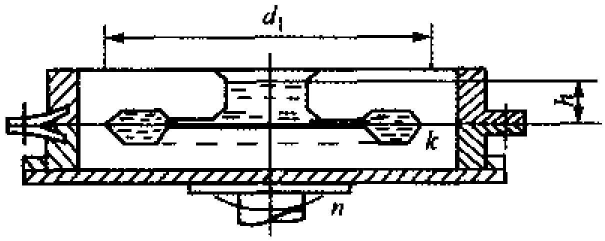


图 3.46

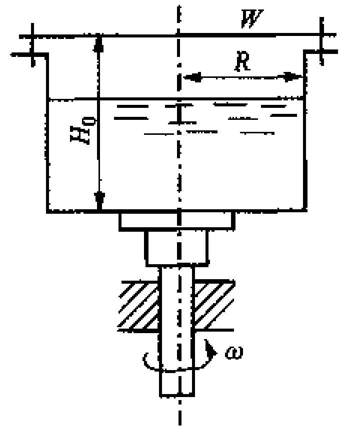


图 3.47

11. 如图 3.48 所示，液体转速计由直径为 d_1 的圆筒和重量为 G 的活塞以及与其连通的两个直径为 d_2 的支管构成，转速计内盛水银，管子距圆筒轴的距离为 R，当转速为 ω 时，求证活塞下降的值为

$$h=\frac{\omega^2}{2g}\frac{R^2-\frac{d_1^{\,2}}{8}}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2}$$

12. 如图 3.49 所示，一水库闸门，闸门自重 $W=2\,500\text{N}$，宽 $b=3\text{m}$，闸门与支撑摩擦系数 $\mu=0.3$，当水深 $H=1.5\text{m}$ 时，问提升闸门所需的力 T 为多少？

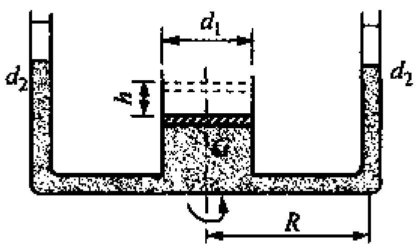


图 3.48

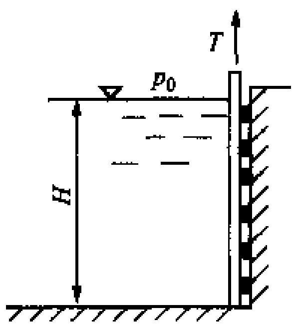


图 3.49

13. 试求如图 3.50 所示单位长度的管道所受总压力的大小。

14. 如图 3.51 所示闸门，假设角度 $\alpha=45°$。半径 $R=2\text{m}$，闸门宽 $B=2\text{m}$，试求作用在闸门上的总压力及其方向？

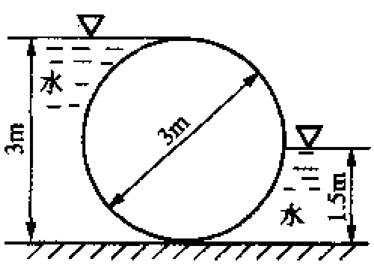


图 3.50

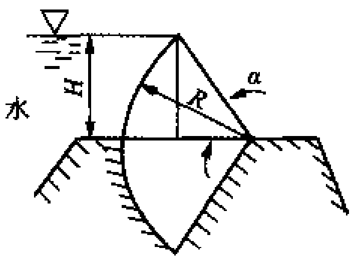


图 3.51

15. 试推导极坐标系(r,θ)下的可压缩流体和不可压缩流体流动的连续性方程。

16. 假设有一不可压缩流体的平面流动，其 x 方向的速度分量为

$$u=\frac{m}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$

试求 y 方向的速度分量 v（在 x 轴上处 $v=0$）。

17. 试判断下列流场：

(1) $u=cy,\ v=w=0$；　　(2) $u=c, v=w=0$；

(3) $u=-cy, v=cx, w=0$；　　(4) $u=\frac{-cy}{x^2+y^2}, v=\frac{cx}{x^2+y^2}, w=0$

哪些是有旋流动，哪些是无旋流动？并求出它们的流线方程。

18. 已知有旋流动的速度场为

$$u=x+y,\ v=y+z,\ w=x^2+y^2+z^2$$

求点 $A(x,y,z)=A(2,2,2)$的旋转角速度分量。

19. 已知有旋流动的速度场为

$$u=2y+3z,\ v=2z+3x,\ w=2x+3y$$

试求：旋转角速度；剪切变形角速度和线变形率。

20. 如图 3.52 所示，一水箱中盛水，水位高 $h=4$m，水箱的侧壁上开有两个孔，孔的淹深分别为 y_1, y_2，如果从两个孔射出的水流都恰好达到 $x=2$m 的距离，求孔的淹深 y_1, y_2。

21. 如图 3.53 所示文丘里流量计测量水的流量，若已知直径 d_1, d_2，高度差 z_2-z_1，以及水银高度 h，试列出流量的表达式。

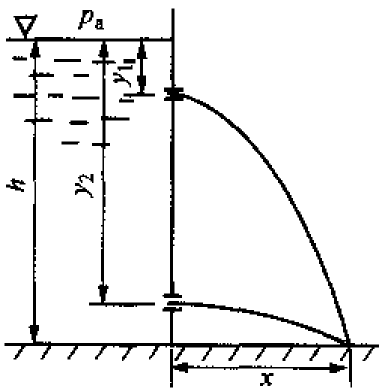


图 3.52

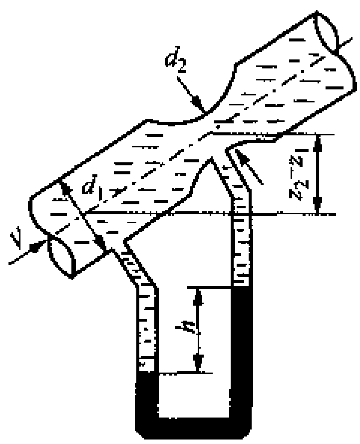


图 3.53

22. 如图 3.54 所示，敞口水池中的水沿一变截面的管道流入大气，其质量流量为 14kg/s。若 $d_1=100$mm，$d_2=75$mm，$d_3=500$mm，并且不计损失，求所需的水头 H，以及第二段管中央 M 点的压力，并绘制测压管水头线。

23. 如图 3.55 所示水沿渐缩管道垂直向上流动，已知 $d_1=30$cm，$d_2=20$cm，相应断面的表压力 $p_1=19.6\text{N/cm}^2$，$p_2=9.81\text{N/cm}^2$，$h=2$m，若不计摩擦损失，试计算其流量。

24. 如图 3.56 所示，水由压力容器中定常流出，液面表压力 $p_g=98\times10^4\text{N/m}^2$，$h=3$m，管嘴直径 $d_1=50$mm，管直径 $d_2=100$mm，不计重力影响，求管嘴上螺栓群受的总拉力。

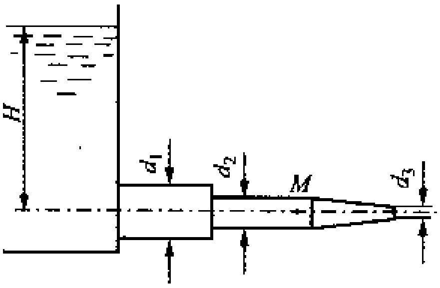


图 3.54

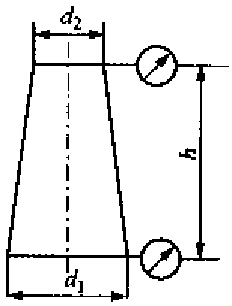


图 3.55

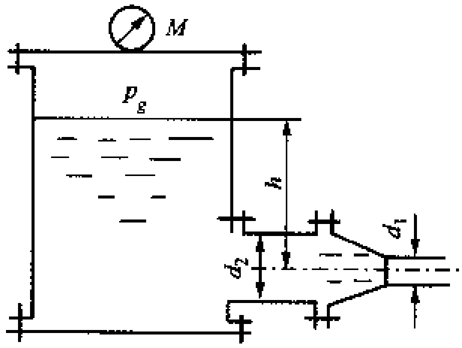


图 3.56

25. 如图 3.57 所示，将一平板伸到水柱内，板垂直于水柱的轴线，已知水柱速度 $V=30\text{m/s}$，流量 $Q=36\text{L/s}$，$Q_2=12\text{L/s}$，求水柱施加在平板上的作用力 R 和水流偏转角 α。忽略重力与黏性的影响。

26. 如图 3.58 所示，一射流喷射到平板上后分成两股，假设其中一股射流的流量是总流流量的 45%，求平板的倾斜角 θ。

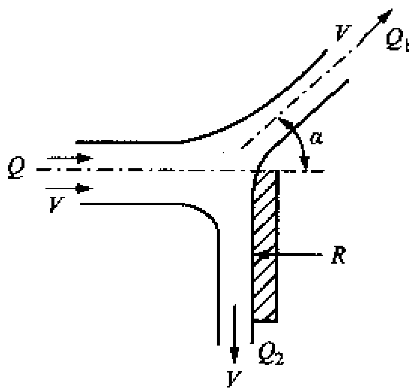


图 3.57

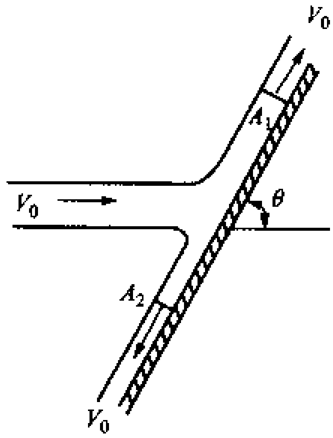


图 3.58

第 4 章　导热的理论基础及计算

导热是非常普遍的传热现象。在传热学的发展史上，首先建立了导热规律和微分方程进行求解。导热也是在工程领域中应用最广泛的一种热量传递方式。本章将运用矢量代数的基本概念，推导傅里叶定律的矢量表达式与建立导热微分方程；掌握温度场、等温面（线）、温度分布、温度梯度及不同材料热导率等基本概念、物理意义及其应用；讨论求解不同类型和坐标系统下的导热微分方程式及其定解条件、初始条件与三类边界条件；正确分析实际导热问题的定解条件；介绍不同材料热导率，学习如何应用图表获得所研究材料的热导率。

为了给读者以更加完整、清晰的物理概念，本书与其他同类教材在编排上不同的是将稳态与非稳态导热问题的求解都放在本章讨论，不再另行安排章节。同时，由于篇幅的限制，不再介绍数值解法。

4.1　导热理论基础

4.1.1　导热基本定律

1. 温度分布的矢量代数表达

实践经验与前人实验表明，导热热流量与温度变化率有关，因而研究导热首先必须研究物体的温度分布，即物体的温度在时间和空间的分布函数表达式

$$t=t(x,y,z,\tau)$$

很明显，描述导热物体中的温度分布及其变化，必须描述物体中某个时刻在空间上所有各点的温度分布，也就是说，像重力场、速度场一样，物体中存在温度场。为此，本节对涉及场论中矢量代数的一些基本概念简介如下。

1）温度场（Temperature field）

一般而言，温度场是时间和空间的函数，即：

$$t = t(x,y,z,\tau) \tag{4-1}$$

式中，t 为温度；x，y，z 为空间坐标；τ 为时间坐标。

温度场按照是否随时间变化分为两类：一类是温度场中温度的分布不随时间发生变化，即稳态温度场（或称定常温度场）；另一类温度场中温度的分布随时间发生变化，即非稳态温度场（或称非定常温度场）。

温度不随时间变化，$\frac{\partial t}{\partial \tau}=0$，此时的导热即为稳态导热（Steady-state heat conduction）。

稳态温度分布的表达式可简化为：$t=t(x,y,z)$。根据物体的温度在几个坐标上发生变化，又可分为一维稳态分布、二维稳态分布和三维稳态分布。

对于温度随时间变化$\frac{\partial t}{\partial \tau}\neq 0$ 的导热称为非稳态导热（Unsteady-state heat conduction）。

按照温度分布的不同坐标数，非稳态导热也可划分为：

(1) 当温度场为一维温度场时，温度与坐标 x 和时间 τ 有关，即 $t=t(x,\tau)$，此时导热为一维非稳态导热；

(2) 当温度场为二维温度场时，温度与坐标 x,y 和时间 τ 有关，即 $t=t(x,y,\tau)$，此时导热为二维非稳态导热；

(3) 当温度场为三维温度场时，温度与坐标 x,y,z 和时间 τ 有关，即 $t=t(x,y,z,\tau)$，此时导热为三维非稳态导热。

2) 等温面与等温线

温度场通常用等温面或等温线表示。温度场中同一时刻同温度各点连成的面，称为等温面。在任何一个二维截面上等温面表现为等温线。习惯上，温度场用等温面与等温线图来表示，图 4.1 是用等温线图表示温度场的实例。

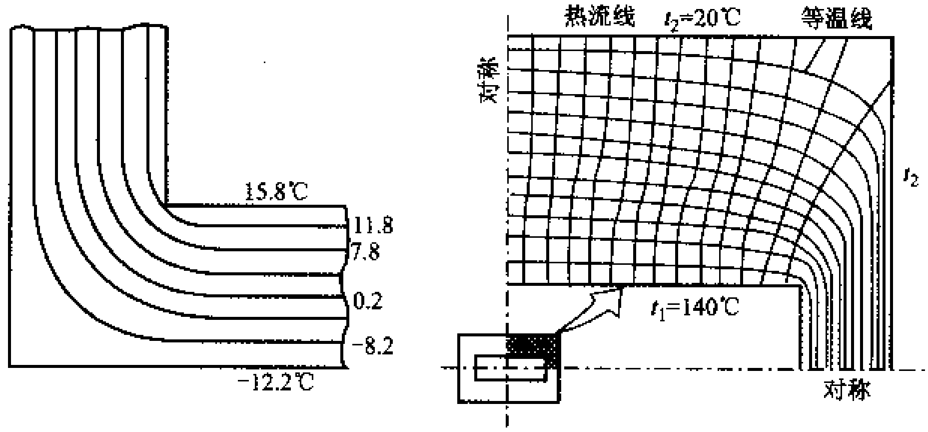


图 4.1 温度场的表示

按照等温面与等温线的定义可知它们具有以下特点：① 温度不同的等温面或等温线彼此不能相交；② 在连续的温度场中，等温面或等温线不会中断，它们或者是物体中完全封闭的曲面(曲线)，或者就终止在物体的表面上；③等温线的疏密可直观地反映出不同区域导热热流密度的相对大小。

3) 温度梯度(温度变化率)(Temperature gradient)

温度梯度是指沿等温面法线方向上的温度增量与法向距离比值的极限，表达式为 grad$t$(图4.2)。在数学上，梯度矢量的方向是变化最剧烈的，而在等温面的法线方向上，单位长度的温度变化率最大，故温度梯度的方向沿等温面的法线方向。同时等温面上没有温差，不会有热传递。因此在不同的等温面之间存在温差，才有导热发生。

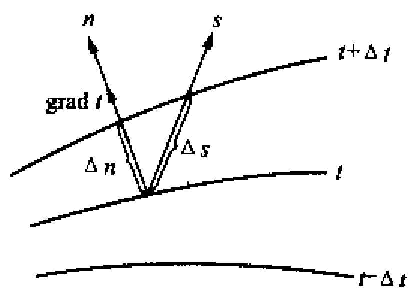


图 4.2 温度梯度

温度梯度的数学表达式如下：

$$\mathrm{grad}t=\lim_{\Delta n\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta n}\boldsymbol{n}=\frac{\partial t}{\partial n}\boldsymbol{n} \tag{4-2}$$

直角坐标系(Cartesian coordinates)的温度梯度：

$$\mathrm{grad}t=\frac{\partial t}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial t}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial t}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{4-3}$$

温度变化值与距离变化值都是标量，与单位向量相乘后成为矢量，温度梯度是向量，正向朝着

温度增加的方向。

4）热流密度矢量(Heat flux)

单位时间、单位面积上所传递的热量即为热流密度，在不同方向上的热流密度的大小不同。热流密度通常表示为$\boldsymbol{q}$ (W/m²)。

在等温面上某点，以通过该点处最大热流密度的方向为方向、数值上正好等于沿该方向的热流密度时称为热流密度矢量(图4.3)。直角坐标系中的热流密度矢量表达式为

$$\boldsymbol{q} = q_x\boldsymbol{i} + q_y\boldsymbol{j} + q_z\boldsymbol{k} \tag{4-4}$$

$$q_\theta = |\boldsymbol{q}|\cos\theta \tag{4-5}$$

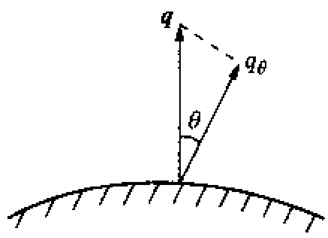


图4.3　热流密度矢量

2. 导热基本定律(傅里叶定律,Fourier's law)

傅里叶(J. B. J. Fourier 法国物理学家、数学家,1768－1830)在将理论解与实验研究对比的基础上，历经15年的辛勤工作，终于在1822年成功地完成了创建导热理论的工作，发表了他的著名论著《热的解析理论》，把导热基本规律用数学形式表达出来，即傅里叶定律。傅里叶还提出采用无穷级数表示微分方程理论解，开辟了数学求解的新途径，成为公认的导热理论的奠基人。

傅里叶定律是反映导热现象的最基本的物理定律，其文字叙述是：单位时间内通过单位截面积所传递的热量，正比于当地垂直于截面方向上的温度变化率，热量传递的方向与温度升高的方向相反。用热流密度$\boldsymbol{q}$表示为

$$\boldsymbol{q} = -\lambda\frac{\partial t}{\partial x}(\mathrm{W/m^2}) \tag{4-6}$$

式(4-6)所表示的仅是物体中温度沿x方向的变化率与热流密度$\boldsymbol{q}$的关系。当物体的温度是2个或3个坐标的函数时，所传递的热量、温度的变化都在每个方向上发生不同的变化，故根据矢量代数，导热基本定律的一般矢量形式为：

$$\boldsymbol{q} = -\lambda \mathrm{grad}\, t\ (\mathrm{W/m^2}) \tag{4-7}$$

在导热基本定律的矢量形式中，垂直导过等温面的热流密度，正比于该处的温度梯度，其方向与温度梯度相反。

直角坐标系中，傅里叶定律表达式为

$$\boldsymbol{q} = q_x\boldsymbol{i} + q_y\boldsymbol{j} + q_z\boldsymbol{k} = -\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\boldsymbol{i} - \lambda\frac{\partial t}{\partial y}\boldsymbol{j} - \lambda\frac{\partial t}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{4-8}$$

式中，$q_x=-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}$表示$x$方向的导热量，$q_y=-\lambda\frac{\partial t}{\partial y}$表示$y$方向的导热量，$q_z=-\lambda\frac{\partial t}{\partial z}$表示$z$方向的导热量。

式(4-6)，(4-7)，(4-8)中的系数λ称为导热系数或热导率，是物质的重要热物性参数。由于λ在傅里叶定律中是作为常数出现的，这表明傅里叶定律只适用于各向同性材料。热导率在各个方向是相同的材料为各向同性材料；热导率在各个方向不同的材料为各向异性材料。常见的各向异性材料有石英、木材、叠层塑料板、叠层金属板等，其热导率随方向而变化。

各向异性材料中：$-q_x=-\lambda_{xx}\frac{\partial t}{\partial x}+\lambda_{xy}\frac{\partial t}{\partial y}+\lambda_{xz}\frac{\partial t}{\partial z}$

$$-q_y=\lambda_{yx}\frac{\partial t}{\partial x}+\lambda_{yy}\frac{\partial t}{\partial y}+\lambda_{yz}\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$-q_z=\lambda_{zx}\frac{\partial t}{\partial x}+\lambda_{zy}\frac{\partial t}{\partial y}+\lambda_{zz}\frac{\partial t}{\partial z}$$

3. 热导率(Thermal conductivity)

热导率是物质的重要热物性参数。热导率的数值就是物体中单位温度梯度、单位时间、通过单位面积的导热量,其单位为[W/(m·K)]。

热导率的数值表征物质的导热能力大小。工程计算用的数值都由专门实验测定,列于图表及手册中供查用。影响热导率的因素主要有物质的种类、材料成分、温度、湿度、压力、密度等。就热导率而言,金属的热导率最高,非金属与液体次之,气体最小。例如,纯铜的热导率为$\lambda_{纯铜}=398W/(m \cdot K)$,大理石的热导率则为$\lambda_{大理石}=2.7W/(m \cdot K)$。在0℃时,冰的热导率为$\lambda_{冰}=2.22W/(m \cdot K)$,水的热导率为$\lambda_{水}=0.551W/(m \cdot K)$,此温度下蒸汽的热导率则为$\lambda_{蒸气}=0.0183W/(m \cdot K)$。

不同物质在不同状态下由于物质结构的不同其导热具有不同的机理。

1) 气体的导热机理及变化规律

气体的导热是由于分子的热运动和相互碰撞时发生能量传递。图4.4为气体导热原理示意图,气体的热导率$\lambda_{气体}\approx0.006\sim0.6W/(m \cdot K)$。0K时,空气的热导率为$\lambda_{空气}=0.0244W/(m \cdot K)$;而20℃时,空气的热导率为$\lambda_{空气}=0.026W/(m \cdot K)$。

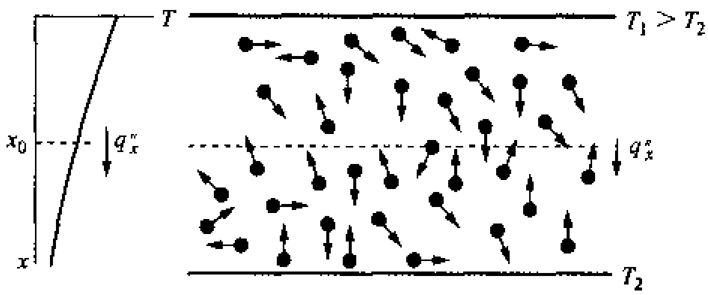


图4.4 气体导热原理示意图

根据气体分子运动理论,常温常压下气体热导率可表示:$\lambda=\frac{1}{3}\bar{u}\rho lc_v$。

式中,$\bar{u}$表示气体分子运动的均方根速度;l为气体分子在两次碰撞间平均自由行程;ρ为气体的密度;c_v表示气体的质量定容热容。

影响气体导热率的因素。

(1) 压力变化。气体的压力升高时,气体的密度增大、平均自由行程减小、而两者的乘积保持不变。除非压力很低或很高,在2.67×10^{-3}MPa ~ 2.0×10^{3}MPa范围内,气体的热导率基本不随压力变化。

(2) 温度变化(图4.5)。气体的温度升高时,气体分子运动速度和质量定容比热容随温度升高而增大。气体的热导率随温度升高而增大。

(3) 分子质量小的气体(H_2,He)因为分子运动速度大,因此热导率较大。对混合气体而言,热导率不能用部分求和的方法求,只能靠实验测定。

2) 液体的热导率

液体主要依靠晶格的振动进行导热。所谓晶格是指理想的晶体中,分子在无限大空间里排列成的周期性点阵。液体热导率范围$\lambda_{液体}\approx0.07\sim0.7W/(m \cdot K)$。在20℃时,水的热导率为$\lambda_{水}=0.6W/(m \cdot K)$。

影响液体热导率的因素。

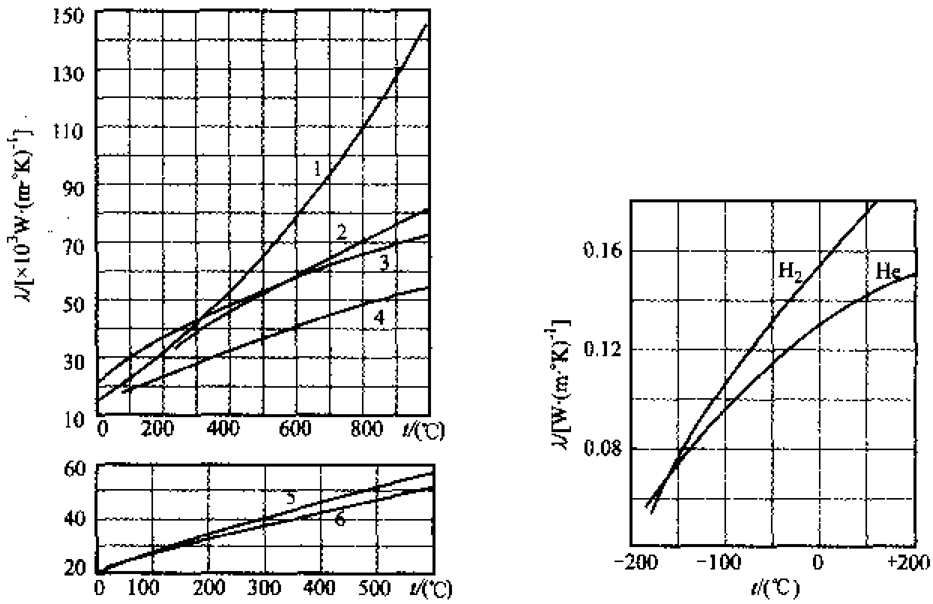


图 4.5　气体的热导率图

1-水蒸汽；2-二氧化碳；3-空气；4-氩气；5-氧气；6-氢气

(1) 温度变化(图 4.6)。大多数液体，其分子量 M 不变。但随着温度的升高，液体密度降低从而导致液体热导率降低，反之亦然。对于水和甘油等强缔合液体，分子量随温度而变化。在不同温度下，热导率随温度的变化规律不一样；

(2) 压力变化。液体的热导率随压力 p 的升高而增大。

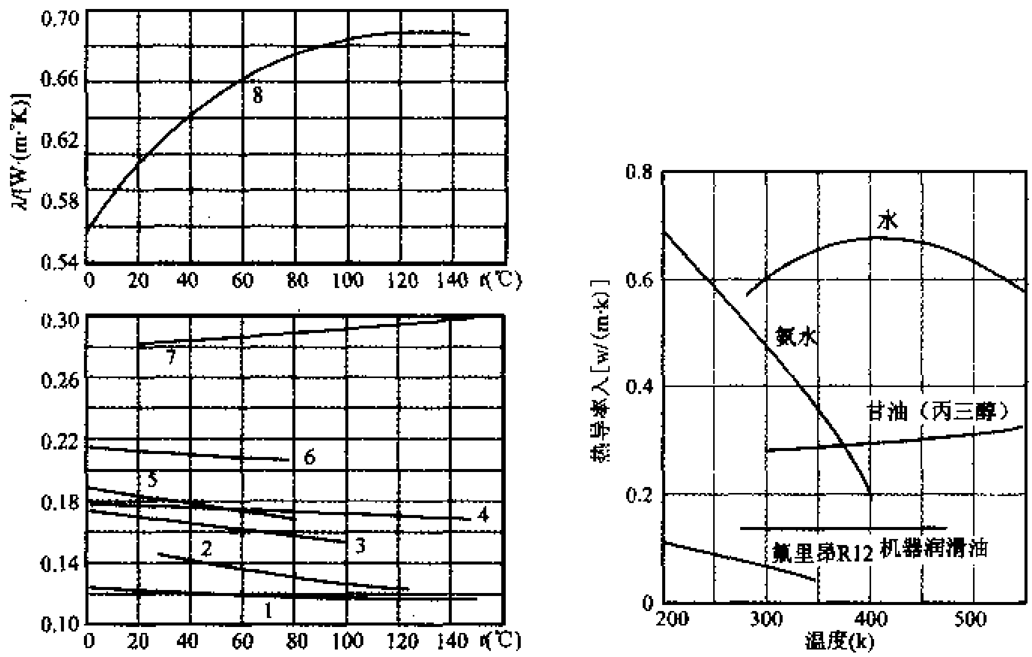


图 4.6　液体的热导率图

1-凡士林油；2-苯；3-丙酮；4-蓖麻油；5-乙醇；6-甲醇；7-甘油；8-水

3) 固体的热导率

(1) 金属的热导率(图 4.7)。纯金属的导热有两种方式：自由电子的迁移和晶格的振动，导热主要依靠前者。金属导热与导电机理一致，故良导电体为良导热体。常温下，金属热导率的范围，$\lambda_{金属}\approx12\sim418W/(m\cdot K)$，并且 $\lambda_{银}>\lambda_{铜}>\lambda_{金}>\lambda_{铝}$。

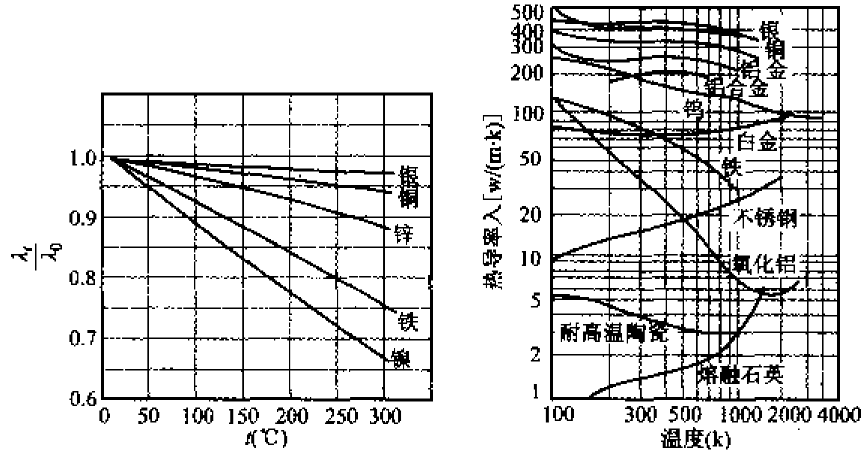


图 4.7 金属的热导率图

金属的导热主要受温度的影响，随着温度的升高，晶格振动加强，自由电子运动受到干扰，从而导致热导率减小。10K 时，铜的热导率为 $\lambda_{Cu}=12\,000$W/(m·K)；而在 15K 时，铜的热导率为 $\lambda_{Cu}=7\,000$W/(m·K)。可以看出，随着温度的升高，铜的热导率随之减小。

(2) 合金的热导率。合金是由两种或两种以上的金属元素(或金属元素与非金属元素)组成的具有金属特性的材料。由于向金属中掺入任何杂质将破坏晶格的完整性，干扰自由电子的运动，导致热导率降低，并且掺入组分的含量越大，热导率降低越多。例如：常温下的纯铜和黄铜(70%Cu，30%Zn)的热导率分别为：$\lambda_{纯铜}=398$W/(m·K)和 $\lambda_{黄铜}=109$W/(m·K)。可以看出，合金的热导率小于纯金属的热导率，即 $\lambda_{合金}<\lambda_{纯金属}$。金属的加工过程也会造成晶格的缺陷，从而造成热导率的减小。随着温度升高，晶格振动加强，热导率增大。

(3) 非金属的热导率(图 4.8)。非金属的导热依靠晶格的振动传递热量。非金属的导热率比金属的导热率小。建筑和隔热保温材料主要采用非金属材料，正是因为非金属的热导率较小。非金属的热导率与温度有关：温度升高，晶格振动加强，导致热导率的增大。同时大多数建筑材料和绝热材料具有多孔或纤维结构，多孔材料的热导率与密度和湿度有关：物体密度降低，湿度降低，将导致热导率的减小。

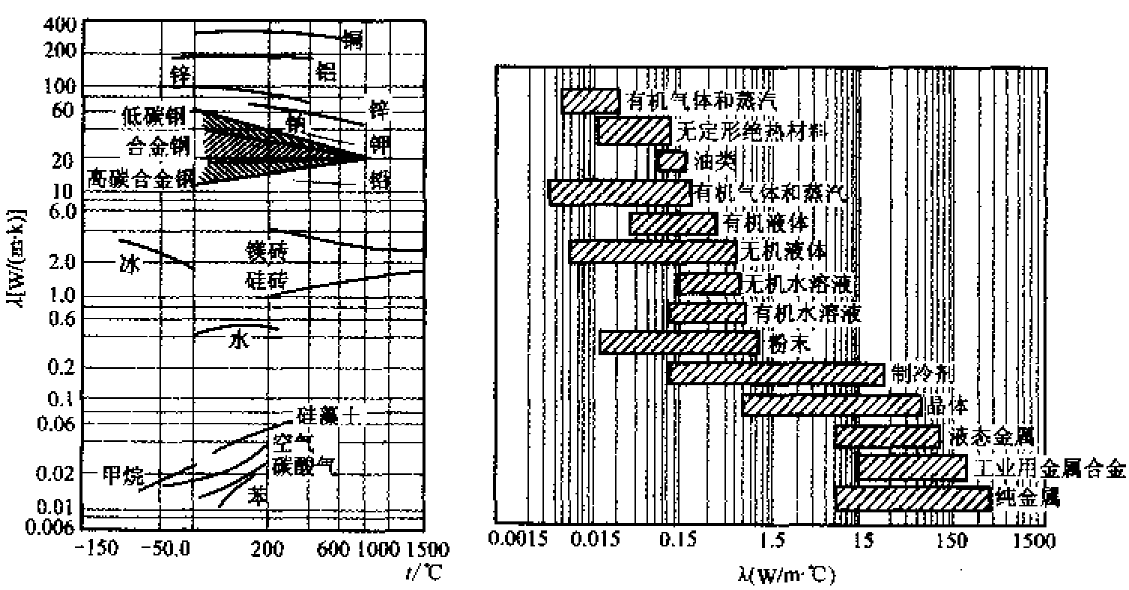


图 4.8 非金属材料的热导率图

非金属材料的热导率范围：$\lambda \approx 0.025 \sim 3\text{W/(m}\cdot\text{K)}$。

保温材料的国家标准：温度低于350℃时，热导率小于0.12W/(m·K)的材料为隔热材料，即保温材料。

4.1.2　导热微分方程式(Heat Diffusion Equation)

求解一维稳态导热问题，只须对傅里叶定律表达式积分，即可获得用两端温差表示的导热量：

$$q = -\lambda \text{grad}\, t \quad (\text{W/m}^2) \tag{4-9}$$

但对多维及不稳态导热问题，确定空间热流密度的大小，必须获得物体内的温度场的数学表达式即 $t=f(x,y,z,\tau)$ 后，才能由傅里叶定律计算空间各点的热流密度矢量。

因此，确定导热体内的温度分布(三维)是求解导热问题的首要任务，必须根据能量守恒定律与傅里叶定律来建立导热物体中的温度场应满足的数学关系式，即建立导热微分方程。从而通过对导热微分方程的数学求解，确定不同坐标方向上导热热流密度的相互联系和温度分布。

建立导热微分方程的理论基础是傅里叶定律和能量守恒定律在热力学中的应用——热力学第一定律。在建立实际问题的数学模型时，首先需要提出下列假设：① 所研究的导热物体是各向同性的连续介质；② 所研究的导热物体的导热率、比热容和密度均为常物性；③ 所研究的导热物体内具有内热源，内热源均匀分布，其强度为 q_r(W/m³)，q_r 表示单位体积的导热体在单位时间内放出的热量。

首先，在导热体中取一微元平行六面体，将空间任一点的任一方向的热流量分解为 xyz 坐标轴方向的热流量；然后依据热力学第一定律列出在任一时间间隔内的热平衡关系。

按照热力学第一定律，微元体的内能变化和对外界功量交换之和应等于微元体与外界的热量交换，即：$Q=\Delta U+W$。由于这里讨论导热问题，不考虑与外界的功的交换，则有：$W=0$，即 $Q=\Delta U$。

这样，微元体中在任一时间间隔 $\mathrm{d}\tau$ 时间内，有以下热平衡关系：

导入与导出净热量＋ 内热源发热量＝ 热力学能的增加

下面分别计算式中所列三项。

1) 导入与导出微元体的净热量

导入与导出微元体的总热流量可从傅里叶定律推出：任意方向的热流量可以分解成 x,y,z 坐标轴方向的分热流量。这些分热流量如图4.9所示。根据傅里叶定律，$\mathrm{d}\tau$ 时间内沿 x 轴方向、经 x 表面导入的热量为

$$\mathrm{d}Q_x = q_x \cdot \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}\tau \quad (\text{J}) \tag{a}$$

$\mathrm{d}\tau$ 时间内沿 x 轴方向经 $x+\mathrm{d}x$ 表面导出的热量为

$$\mathrm{d}Q_{x+\mathrm{d}x} = q_{x+\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}\tau \quad (\text{J}) \tag{b}$$

由于 $q_{x+\mathrm{d}x}=q_x+\dfrac{\partial q_x}{\partial x}\mathrm{d}x$，

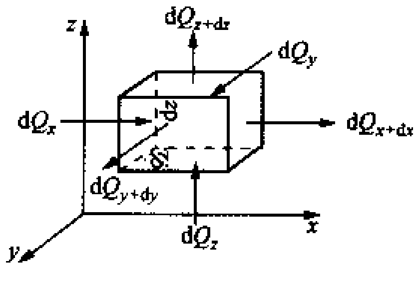


图4.9　微元平行六面体的导热分析

从而导出 $\mathrm{d}\tau$ 时间内、沿 x 轴方向导入与导出微元体净热量为

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x}dx\,dy\,dz d\tau \quad (J) \tag{c}$$

同样的步骤导出：

$d\tau$ 时间内、沿 y 轴方向导入与导出微元体净热量为

$$dQ_y - dQ_{y+dy} = -\frac{\partial q_y}{\partial y}dx\,dy\,dz d\tau \quad (J) \tag{d}$$

$d\tau$ 时间内、沿 z 轴方向导入与导出微元体净热量为

$$dQ_z - dQ_{z+dz} = -\frac{\partial q_z}{\partial z}dx\,dy\,dz d\tau \quad (J) \tag{e}$$

因此可得：

$$\text{导入与导出净热量} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,d\tau \qquad (J) \tag{f}$$

基于傅里叶定律有，$q_x = -\lambda\,\frac{\partial t}{\partial x}, q_y = -\lambda\,\frac{\partial t}{\partial y}, q_z = -\lambda\,\frac{\partial t}{\partial z}$。

式(f)可写为

$$\text{导入与导出净热量} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\,\frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\,\frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\,\frac{\partial t}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz\,d\tau \quad (J) \tag{g}$$

2）微元体中内热源的发热量

$$d\tau\text{ 时间微元体中内热源的发热量} = q_v dx\,dy\,dz\,d\tau \qquad (J) \tag{h}$$

3）微元体热力学能的增量

$$d\tau\text{ 时间微元体中热力学能的增量} = \rho c\,\frac{\partial t}{\partial \tau}dx\,dy\,dz\,d\tau \quad (J) \tag{i}$$

最后，导出导热微分方程的一般形式

由(g)+(h)=(i)，可得式(4-10)，

$$\rho c\,\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\,\frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\,\frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\,\frac{\partial t}{\partial z}\right) + q_v \tag{4-10}$$

因为已假设热导率、比热容和密度均为常物性，因此将上式中 λ 提到括号外，再将等式两边同除以ρc，可得：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{\rho c} \tag{4-11}$$

也可写为：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{\rho c} \tag{4-12}$$

式中：$a = \frac{\lambda}{\rho c}$($m^2 \cdot s$)为热扩散率(导温系数)，$\nabla^2$为拉普拉斯算子。

这就是直角坐标系中三维非稳态导热微分方程的一般形式。针对不同的具体导热过程，导热微分方程还有以下相应的简化形式。

(1) 物性参数为常数，无内热源(傅里叶方程，Fourier Equation)

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \tag{4-13}$$

它适用于常物性，无内热源的三维非稳态导热问题的求解。

(2) 物性参数为常数，无内热源，稳态导热(拉普拉斯方程，Laplace Equation)

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \tag{4-14}$$

它适用于常物性，无内热源的三维稳态导热问题的求解。

(3) 物性参数为常数，有内热源的稳态导热(泊松方程，Poisson Equation)：

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\rho c} = 0 \tag{4-15}$$

它适用于常物性、有内热源的三维稳态导热问题的求解。

对于实际问题中遇到的圆柱坐标系及球坐标系的导热问题，运用数学上的坐标转换，可得到转换成圆柱坐标系及球坐标系的导热微分方程表达式。

(1) 圆柱坐标系($r,\ \phi,\ z$)

运用坐标变换 $x=r\cos\phi, y=r\sin\phi, z=z$ 可得：

$$q_r = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r},\ q_\phi = -\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \phi},\ q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}$$

将之代入傅里叶定律可得：

$$\boldsymbol{q} = -\lambda \mathrm{grad} t = -\lambda \nabla t = -\lambda\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial t}{\partial r} + \boldsymbol{j}\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \phi} + \boldsymbol{k}\frac{\partial t}{\partial z}\right) \tag{4-16}$$

即圆柱坐标系的导热微分方程为，

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right) + q_v \tag{4-17}$$

(2) 球坐标系($r,\ \theta,\ \phi$)

运用坐标变换 $x=r\sin\theta\cdot\cos\phi,\ y=r\sin\theta\cdot\sin\phi,\ z=r\cos\theta$ 可得：

$$q_r = -\lambda\frac{\partial t}{\partial r}, q_\theta = -\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}, q_\phi = -\lambda\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}$$

将之代入傅里叶定律可得：

$$q = -\lambda \mathrm{grad}\, t = -\lambda \nabla t = -\lambda\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial t}{\partial r} + \boldsymbol{j}\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta} + \boldsymbol{k}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\right) \tag{4-18}$$

即可得球坐标系的导热微分方程，

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial \phi}\right) + q_v \tag{4-19}$$

式(4-11)所示导热微分方程是描写导热过程共性的数学表达式。等号左边一项是单位时间内微元体热力学能的增量，称为非稳态项；等号右边前三项之和是通过界面的导热而使微元体在单位时间内增加的能量，称为扩散项；等号右边最后一项是源项。但实际工程中各类导热问题都具有各自的个性。例如针对某具体问题，如果在某一坐标方向上温度不发生变化，该方向的净导热量为零，则上述三维表达式中相应的扩散项即可去掉。又如在许多实际导热问题中，把热导率取为常量是可以容许的。而有一些特殊场合热导率是温度的函数，不能当作常量处理，即变热导率导热问题。注意到热导率不能作为常数的特点，可以推导出变热导率的导热方程式。例如，在直角坐标系中，非稳态、有内热源的变热导率导热微分方程式为导热微分方程的一般形式。

当导热过程为非傅里叶导热过程时，导热微分方程式即不可使用。所谓非傅里叶导热过程是指导热体不遵从傅里叶导热定律的导热过程。例如，极短时间产生极大的热流密度的热量传递现象，如激光加工过程以及极低温度(接近于 0 K)时的导热问题，导热微分方程就不能

使用了。

4.1.3 导热过程的初始条件与边界条件

求解导热问题归结为对导热微分方程式的求解。导热微分方程描写了物体温度随时间和空间变化的关系，没有涉及具体、特定的导热过程，是一个通用表达式。所获得的解是该导热微分方程式的通解。但实际工程的导热问题的求解，必须得到既满足导热微分方程式，又满足根据具体问题规定的附加条件下的特解，这才是具体问题的解答。使微分方程得到特解的附加条件即数学上的定解条件。

确定唯一解的附加补充说明条件的完整数学描述被称为定解条件。定解(单值性)条件包括四类：几何条件、物理条件、时间条件和边界条件。

几何条件：说明导热体的几何形状和大小，如：平壁、圆筒壁；厚度、直径等。

物理条件：说明导热体的物理特征，如：物性参数 λ，c 和 ρ 的数值是否随温度变化；有无内热源、其大小和分布；是否各向同性等。

时间条件(初始条件)：说明导热过程随时间进行的特点。

1) 导热过程与时间无关——稳态过程无时间条件；

2) 导热过程与时间有关——非稳态过程有时间条件。

非稳态导热过程的求解，必须给出过程开始时刻导热体内的温度分布，即 $t|_{\tau=0}=f(x,y,z)$。时间条件又称为初始条件(Initial conditions)。例：$t|_{\tau=0}=t_0$。

边界条件：说明导热体边界上导热过程的特点，反映过程与周围环境相互作用的条件。

导热问题常见的边界条件一般可分为三类：

(1) 第一类边界条件：规定了边界上的温度值。此类边界条件最简单的典型特例就是规定边界温度保持常数，即 $t_w=$常数。

对于稳态导热，第一类边界条件为：$t_w=$ 常数；

对于非稳态导热，第一类边界条件为：$t_w= f(\tau)$。

例：如图 4.10 所示 $x=0$，$t=t_{w1}$；$x=\delta$，$t=t_{w2}$。

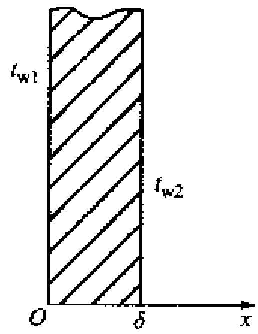


图 4.10 第一类边界条件示例

(2) 第二类边界条件：规定了边界上的热流密度值(图4.11)。

已知物体边界上热流密度的分布及变化规律为

$$q|_s = q_w = f(x,y,z,\tau) \tag{4-20}$$

根据傅里叶定律有

$$q_w = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w \tag{4-21}$$

即

$$-\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w = \frac{q_w}{\lambda} \tag{4-22}$$

第二类边界条件相当于已知任何时刻物体边界面法向的温度梯度值。

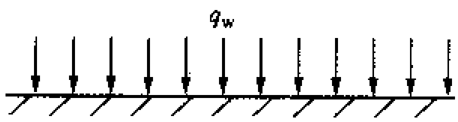


图 4.11 第二类边界条件示例

对于稳态导热，第二类边界条件为：$q_w=\mathrm{cons}\,t$；

非稳态导热，第二类边界条件为：$q_w=f(\tau)$。

特例：对于绝热边界面，第二类边界条件为 $q_w=-\lambda\left(\dfrac{\partial t}{\partial n}\right)_w=0$，

即$\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w=0$。

(3) 第三类边界条件:规定了边界上物体与周围流体间的表面传热系数 h 及周围流体的温度 t_f(图 4.12)。

当物体壁面与流体相接触进行对流换热时,已知任一时刻边界面周围流体的温度和表面传热系数:

由牛顿冷却定律:$q_w=h(t_w-t_f)$ 和傅里叶定律:$q_w=-\lambda(\partial t/\partial n)_w$,可得第三类边界条件为 $-\lambda(\partial t/\partial n)_w=h(t_w-t_f)$

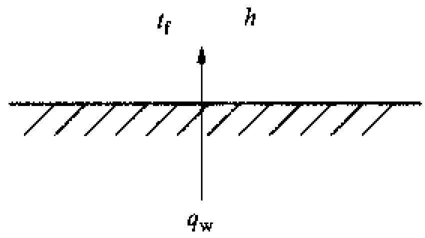


图 4.12 第三类边界条件示例

导热微分方程式的求解方法有多种,主要有:解析解、积分法、拉普拉斯变换法、分离变量法、积分变换法、数值解、数值计算法等。

导热问题求解的步骤:

第一步:分析题中已知条件,将实际工程问题用数学方程表示出;确定属于哪一类导热问题、定性地确定温度分布等,从而确定所用导热微分方程;第二步:根据方程及已知定解条件,确定求解方法,求得特解后将已知数据代入求解;第三步:检查所用单位,分析所获结果是否合理。

4.1.4 热扩散率(导温系数)

上述推导导热微分方程时,引出了一个非常重要的参数,热扩散率(导温系数),$a=\frac{\lambda}{\rho c}$ (m^2/s)它是求解导热问题的重要物性参数。热扩散率反映了导热过程中材料的导热能力(λ)与沿途物质储热能力(ρc)之间的关系。a 值大,即 λ 值大或ρc 值小,说明物体的某一部分一旦获得热量,该热量能在整个物体中很快扩散。热扩散率的大小表征了物体被加热或冷却时,物体内各部分温度趋向于均匀一致的能力。从温度的角度出发,在同样加热条件下,物体的热扩散率越大,物体内部各处的温度差别越小。正是由于 a 的大小表征了物体传播温度变化的能力,在传热学中,热扩散率也称为导温系数。

例如,木材的热扩散率为 $a_{木材}=1.5\times10^{-7}\,m^2/s$,而铝热扩散率为 $a_{铝}=9.45\times10^{-5}\,m^2/s$,两者热扩散率之比为 $a_{木材}/a_{铝}\approx1/600$。铝的热扩散率远大于木材的热扩散率,这与我们在日常生活中,在同样的环境温度下,如寒冷的冬季接触木材和铝会有不同的感受是一致的。

热扩散率是反应物体导热过程动态特性的重要物理量,是研究不稳态导热的重要物性参数。

4.2 导热问题的计算

上一节介绍了物体通过导热方式进行热量传递的基本术语、基本概念、基本理论和基本定律,推导了导热微分方程。本节将详细讨论导热问题的基本计算,拟通过例题深入说明计算方法。

首先研究稳态导热,按照一维、二维和三维系统的顺序逐步展开。然后,按照基本上与稳态导热系统相同的顺序研究不稳态导热的问题。

本节主要内容为介绍平壁，圆筒壁，球壁及表面有散热的长杆的稳态导热问题的求解；接触热阻与形状因子；通过学习能准确地计算所研究稳态导热问题中传递的热流量与预测所研究系统的温度分布；介绍非稳态导热基本概念；结合工程实际需要讨论第一类边界条件下半无限大平板的导热问题、第三类边界条件下平板、圆柱、球体的导热问题与分析解法和主要结果；掌握确定瞬态温度场的方法及在一段时间间隔内物体所传导热量的计算方法；研究影响导热的因素及其控制方法。

4.2.1 稳态导热

前已述及，在以导热方式进行热量传递的过程中，若物体的温度场不随时间改变，称为稳态导热。不考虑时间因素，为分析研究提供了某些简化。具有内热源的稳态导热的基本方程是

$$a\nabla^2 t+\frac{\Phi}{\rho c}=0 \tag{4-23}$$

上式称为泊松方程。若没有内热源的稳态导热，可应用拉普拉斯方程求解：

$$\nabla^2 t=0 \tag{4-24}$$

需要指出的是，上述两个方程式适用于性质不随方向而改变的各向同性介质的稳态导热。

4.2.1.1 一维系统的稳态导热

如前所述，一维拉普拉斯方程的通用形式为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda x^i\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)+q_v=0 \tag{4-25}$$

式中，对于直角、圆柱和球坐标系，分别取 $i=0,1$ 或 2。

1. 通过平壁的导热

如图 4.13 所示平壁。首先假设平壁的长度和宽度远大于其厚度 δ，并且平壁各向同性且物性 ρ,c,λ 已知。

1) 第一类边界条件下(即已知 t_w)通过平壁的一维稳态导热

(1) 单层平壁

① λ 为常数、无内热源时：

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2}=0\qquad\begin{cases}x=0 & (t=t_{w1})\\ x=\delta & (t=t_{w2})\end{cases} \tag{4-26}$$

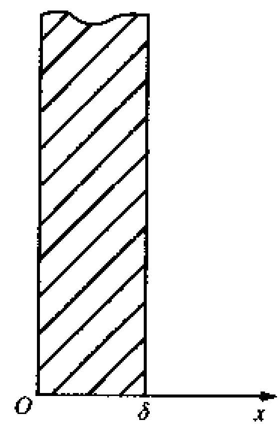


图 4.13　平壁示意图

对微分方程式(4-26)连续两次积分，得通解为

$$t=C_1x+C_2 \tag{4-27}$$

根据边界条件来确定积分常数 C_1 和 C_2，得：

$C_2=t_{w1}$，　$C_1=(t_{w2}-t_{w1})/\delta$ 将 C_1 和 C_2 代入式(4-27)，可得平壁内温度分布：

$$t=\frac{t_{w2}-t_{w1}}{\delta}x+t_{w1}=t_{w1}-(t_{w1}-t_{w2})\frac{x}{\delta} \tag{4-28}$$

根据式(4-28)，在给定条件下平壁中的温度变化是直线，如图4.14所示。

应用傅里叶定律可以确定导过平壁的热流量为

$$\Phi = -\lambda A\frac{dt}{dx} = \lambda A\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta}$$

$$= \frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta/\lambda A} = \frac{t_{w1}-t_{w2}}{R_\lambda}(W) \quad (4-29)$$

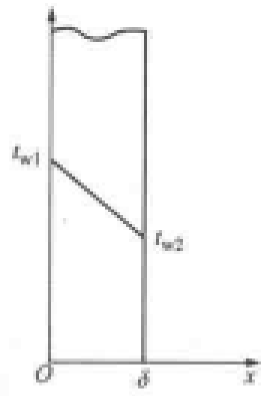


图 4.14　平壁中温度变化示意图

式中，$R_\lambda=\delta/(\lambda A)$是导热面积为$A$时的导热热阻，单位为(K/W)。

将热流量除以导热面积A即可得热流密度：

$$q=\frac{Q}{A}=\lambda\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta}=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta/\lambda}=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{r_\lambda}(W/m^2) \quad (4-30)$$

式中，$r_\lambda=\delta/\lambda$ 为单位面积上导热热阻，单位为(m^2K/W)。

② λ 为常数、有内热源时(图 4.15)，导热方程为

$$\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{q_v}{\lambda}=0 \quad (4-31)$$

边界条件为 $\begin{cases} x=0 & (t=t_{w1}) \\ x=\delta & (t=t_{w2}) \end{cases}$

对微分方程式(4-31)连续两次积分，得

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{q_v}{\lambda}x+C_1$$

$$t=-\frac{q_v}{2\lambda}x^2+C_1x+C_2 \quad (4-32)$$

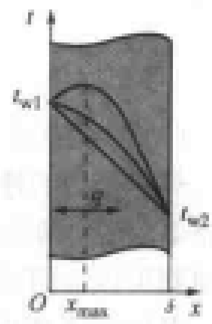


图 4.15　有内热源时平壁内的温度分布示意图

根据边界条件来确定积分常数 C_1 和 C_2 温度分布：

$$C_2=t_{w1},\ C_1=\frac{t_{w2}-t_{w1}}{\delta}+\frac{q_v}{2\lambda}\delta$$

$$t_{w1}=C_2$$

$$t_{w2}=-\frac{q_v}{2\lambda}\delta^2+C_1\delta+C_2$$

$$t=-\frac{q_v}{2\lambda}x^2+\left(\frac{t_{w2}-t_{w1}}{\delta}+\frac{q_v}{2\lambda}\delta\right)x+t_{w1}=\frac{(\delta x-x^2)}{2\lambda}q_v+\frac{t_{w2}-t_{w1}}{\delta}x+t_{w1} \quad (4-33)$$

应用傅里叶定律可以确定导过平壁的热流密度为

$$q=-\lambda\frac{dt}{dx}=-\lambda\left[\frac{(\delta-2x)}{2\lambda}q_v+\frac{t_{w2}-t_{w1}}{\delta}\right] \quad (4-34)$$

当没有内热源时：$q_v=0$

此时平壁内的温度分布为

$$t=t_w-\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta}x \quad (4-35)$$

下面，我们对平壁内温度曲线的形状进行讨论。

当 $t_{w1}=t_{w2}$时(即平壁两侧面温度相等)，有

$$t=\frac{(\delta x-x^2)}{2\lambda}q_v+t_{w1} \quad (4-36)$$

令$\frac{dt}{dx}=\frac{(\delta-2x)}{2\lambda}q_v=0$，则有

$$x=\frac{\delta}{2} \tag{4-37}$$

当 $t_{w1}\neq t_{w2}$ 时，有

$$\frac{dt}{dx}=\frac{\delta}{2\lambda}q_v-\frac{x}{\lambda}q_v+\frac{t_{w2}-t_{w1}}{\delta} \tag{4-38}$$

令 $\frac{dt}{dx}=0$，则可得

$$x=\frac{\delta}{2}+\frac{t_{w2}-t_{w1}}{\delta}\frac{\lambda}{q_v} \tag{4-39}$$

例 4-1　单层平壁导热

已知用平底锅烧开水导热量 $q=42\,400\text{W/m}^2$，锅底水垢厚度为 $\delta=2\text{mm}$，水垢上表面温度为 $t_1=111℃$，$\lambda=1\text{W/(m·K)}$。试求水垢的下表面温度 t_2。

解：根据傅里叶定律知

$$q=-\lambda\frac{\Delta t}{\delta}=-\lambda\frac{(t_2-t_1)}{\delta}$$

移项可得

$$t_2=t_1+\frac{q}{\lambda}\delta=111+\frac{42\,400}{1}\times 0.002=195.8℃\ 。$$

(2) 多层平壁

热阻概念的建立对复杂热转移过程的分析带来很大的便利，可以借用比较熟悉的串、并联电路电阻的计算公式来计算热转移过程的合成热阻(或称总热阻)。串联电路叠加总电阻的计算原则可以应用到串联导热热阻的计算上，从而方便的推导出复合壁的导热公式。

多层平壁是指由多种不同材料叠加在一起组成的复合壁(图 4.16)。例如，房屋的墙壁由白灰内层、水泥沙浆层、红砖(青砖)主体层等组成。假设各层之间接触良好，可以近似地认为接合面上各处的温度相等，则有

$$\Phi=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta_1/\lambda_1 A}=\frac{t_{w2}-t_{w3}}{\delta_2/\lambda_2 A}=\frac{t_{w3}-t_{w4}}{\delta_3/\lambda_3 A}$$

$$\Phi=\frac{t_{w1}-t_{w4}}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1 A}+\dfrac{\delta_2}{\lambda_2 A}+\dfrac{\delta_3}{\lambda_3 A}} \tag{4-40}$$

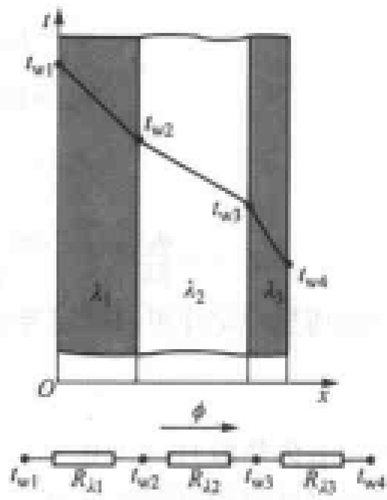


图 4.16　三层平壁的稳态导热

式(4-40)中，Φ 就等于温差除以热阻。求得热流量，就可以得到热流密度

$$q=\frac{\Phi}{A}=\frac{t_{w1}-t_{w4}}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1}+\dfrac{\delta_2}{\lambda_2}+\dfrac{\delta_3}{\lambda_3}} \tag{4-41}$$

将多层平壁扩展到 n 层平壁，同理，有

$$\Phi=\frac{t_{w1}-t_{wn+1}}{\sum_{i=1}^{n}R_{\lambda i}} \tag{4-42}$$

式中，$R_{\lambda_i}=\frac{\delta_i}{\lambda_i A}$ 为总热阻。

2）第三类边界条件下通过平壁的一维稳态导热(图4.17)

(1) 单层平壁(λ为常数、无内热源)

控制方程：　$\frac{d^2t}{dx^2}=0$

第三类边界条件：$x=0,\ -\lambda\frac{dt}{dx}=h_1(t_{f1}-t_{w1})$

$$x=\delta,-\lambda\frac{dt}{dx}=h_2(t_{w2}-t_{f2})$$

由于是稳态传热，因此在传热过程中热流密度保持不变，有

$$\begin{aligned}q_{x=0}&=h_1(t_{f1}-t_{w1})\\&=q\\&=\lambda(t_{w1}-t_{w2})/\delta\\&=q_{x=\delta}\\&=h_2(t_{w2}-t_{f2})\end{aligned}\tag{4-43}$$

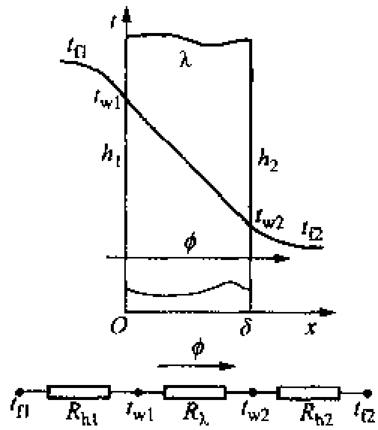


图4.17　第三类边界条件下一维平壁的非稳态导热

由式(4-43)可得

$$q=\frac{t_{f1}-t_{f2}}{\frac{1}{h_1}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{h_2}}=k(t_{f1}-t_{f2})\tag{4-44}$$

式中，$k=\frac{1}{\frac{1}{h_1}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{h_2}}$，称为传热系数，单位为[W/(m² · K)]

(2) 多层平壁(λ为常数、无内热源)

由于多层平壁的总热阻等于各层热阻之和，利用上述算法对多层平壁热流密度的算法进行计算，可得

$$q=\frac{t_{f1}-t_{f2}}{\frac{1}{h_1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\lambda_i}+\frac{1}{h_2}}\quad(\mathrm{W/m^2})\tag{4-45}$$

例4-2　多层平壁导热

已知房子的外墙砖厚度大约是4英寸(1英寸=2.54厘米)，其热导率λ=0.7W/(m · K)，接着是一层厚度约为1.5英寸的石膏涂层，其热导率λ=0.48W/(m · K)。如果再在其上涂一层热绝缘层，其热导率为λ=0.065 W/(m · K)，试问当热绝缘层为多厚时，通过墙壁的散热量降低80%？

解：总散热量可以通过下式求得

$$q=\frac{\Delta T}{\sum R_{th}}$$

由于加上绝缘层之后的散热量仅是没加绝缘层时散热量的20%(降低80%)，即

$$\frac{q_{with}}{q_{without}}=0.2=\frac{\sum R_{thwith}}{\sum R_{thwithout}}$$

在单位面积上，砖和石膏涂层的热阻分别为

$$R_b=\frac{\Delta x}{\lambda}=\frac{4\times0.0254}{0.7}=0.145\mathrm{m^2\cdot K/W}$$

$$R_p=\frac{\Delta x}{\lambda}=\frac{1.5\times0.0254}{0.48}=0.079\text{m}^2\cdot\text{K/W}$$

因此，没有绝缘层时的总热阻为

$$R=0.145+0.079=0.224\text{m}^2\cdot\text{K/W}$$

则有绝缘层时的热阻为

$$R_{\text{with}}=\frac{0.224}{0.2}=1.12\text{m}^2\cdot\text{K/W}$$

因此绝缘层的热阻可通过总热阻 R_{with} 和 R 求得

$$1.12=0.224+R_{\text{rw}}$$

$$R_{\text{rw}}=0.896=\frac{\Delta x}{\lambda}=\frac{\Delta x}{0.065}$$

因此

$$\Delta x_{\text{rw}}=0.0582\text{m}=2.3\text{in}$$

2. 通过圆筒壁的导热

1) 第一类边界条件下通过圆筒壁的导热

(1) 单层圆筒壁

工程上许多导热体是圆筒形的，如：热力管道、换热器中的管道等。当圆筒壁的外半径小于长度的 1/10 时，可以将圆筒看作无限长，同时当内、外壁温保持不变时，不必考虑轴向和周向导热，这样圆筒的导热问题就可简化成一维径向稳态导热(图 4.18)。

假设，单层圆筒的长度为 L；热导率 λ 为定值；无内热源，则有导热微分方程为：

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dt}{dr}\right)=0 \tag{4-46}$$

几何条件：单层圆筒壁内外径分别为：r_1, r_2

物理条件：λ 已知，且无内热源

时间条件：稳态导热，不随时间变化：$\partial t/\partial\tau=0$

边界条件：$r=r_1$ 时，$t=t_{w1}$；$r=r_2$ 时，$t=t_{w2}$

将式(4-46)两边同时积分两次，可得

$$r\frac{dt}{dr}=C_1$$

$$t=C_1\ln r+C_2 \tag{4-47}$$

将边界条件代入式(4-47)，可得

$$t_{w1}=C_1\ln r_1+C_2 \tag{4-48}$$

$$t_{w2}=C_1\ln r_2+C_2 \tag{4-49}$$

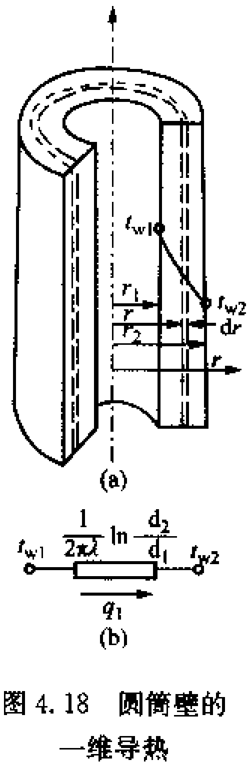


图 4.18 圆筒壁的一维导热

求解，即可确定积分常数 C_1 和 C_2

$$C_1=\frac{t_{w2}-t_{w1}}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$C_2=t_{w1}-(t_{w2}-t_{w1})\frac{\ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}$$

将 C_1 和 C_2 带入式(5-25)，可得圆筒壁内温度分布(图4.19)：

$$t=\frac{t_{w2}-t_{w1}}{\ln(r_2/r_1)}\ln r+t_{w1}-(t_{w2}-t_{w1})\frac{\ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}$$
$$=t_{w1}-(t_{w1}-t_{w2})\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \qquad (4\text{-}50)$$

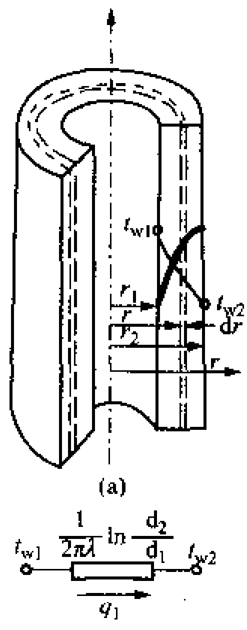


图4.19　圆筒壁的温度分布

下面，我们对圆筒壁内温度分布曲线的形状进行讨论：

$$t=t_{w1}-(t_{w1}-t_{w2})\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \qquad (4\text{-}51)$$

$$\frac{dt}{dr}=-\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\ln(r_2/r_1)}\frac{1}{r} \qquad (4\text{-}52)$$

$$\frac{d^2t}{dr^2}=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\ln(r_2/r_1)}\frac{1}{r^2} \qquad (4\text{-}53)$$

分析式(4-52)和式(4-53)，可知若 $t_{w1}>t_{w2}$ 时，$\frac{d^2t}{dr^2}>0$，温度曲线向上凹；

若 $t_{w1}<t_{w2}$ 时，$\frac{d^2t}{dr^2}<0$，温度曲线向下凹。

此时可得圆筒壁内导热热流量为

$$\Phi=-\lambda A\frac{dt}{dr}=-\lambda 2\pi rL\left(-\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\ln(r_2/r_1)}\frac{1}{r}\right)=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\frac{r_2}{r_1}}=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{R_\lambda}\ (\text{W}) \qquad (4\text{-}54)$$

式中，$R_\lambda=\frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\frac{r_2}{r_1}$ 为长度为 L 的圆筒壁的导热热阻，单位为(K/W)。

此时，单位长度圆筒壁的热流量为

$$q_1=\frac{\Phi}{L}=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}}=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{R_{\lambda1}}(\text{W/m}) \qquad (4\text{-}55)$$

式中，$R_\lambda=\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}$ 为单位长度的圆筒壁的导热热阻，单位为(m·K/W)。

(2) 多层圆筒壁(图4.20)

对于由不同材料构成的多层圆筒壁，其导热热流量可按总温差和总热阻计算

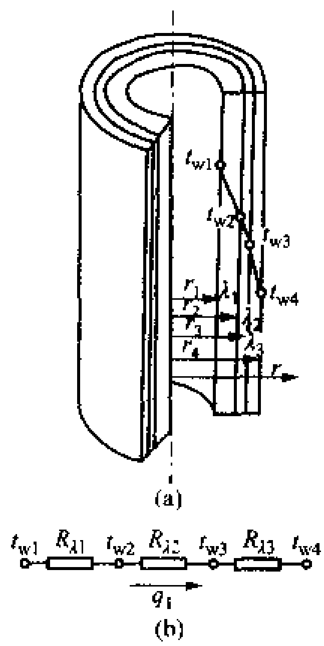


图4.20　三层圆筒壁的稳态导热

$$\Phi=\frac{t_{w1}-t_{w4}}{\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2\pi\lambda_i L}\ln\frac{r_{i+1}}{r_i}}\quad(\text{W}) \qquad (4\text{-}56)$$

$$q_1=\frac{t_{w1}-t_{w4}}{\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2\pi\lambda_i}\ln\frac{r_{i+1}}{r_i}}\quad(\text{W/m}) \qquad (4\text{-}57)$$

对于 n 层圆筒壁，其计算方法与上面相同，有

$$q_1=\frac{t_{w1}-t_{wn+1}}{\sum_{i=1}^{n}R_{\lambda i}}=\frac{t_{w1}-t_{wn+1}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi\lambda_i}\ln\frac{r_{i+1}}{r_i}} \qquad (4\text{-}58)$$

2）第三类边界条件下通过圆筒壁的导热

（1）单层圆筒壁

在第三类边界条件下对圆筒壁的简化假设与第一类边界条件下的相同，即当圆筒壁的外半径小于长度的 1/10 时，可以将圆筒看作无限长，同时当内、外壁温保持不变时，不考虑轴向和周向导热，这样我们就将圆筒的导热问题简化成为一维径向稳态导热（图 4.21）。

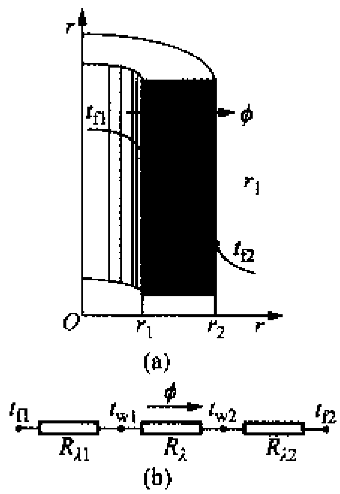


图 4.21 第三类边界条件下的导热

假设，单层圆筒的长度为 L；热导率 λ 为定值；无内热源，则有

导热微分方程为：$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dt}{dr}\right)=0$ (4-59)

几何条件：单层圆筒壁内外径分别为 r_1, r_2

物理条件：λ 已知，且无内热源

时间条件：稳态导热，不随时间变化：$\frac{\partial t}{\partial \tau}=0$

边界条件：$r=r_1$ 时，$-\lambda\frac{dt}{dr}\Big|_{r_1}=h_1(t_{f1}-t_{w1})$；

$r=r_2$ 时，$-\lambda\frac{dt}{dr}\Big|_{r_2}=h_2(t_{w2}-t_{f2})$根据能量守恒定律，可得

$$q_l\,|_{r_1}=2\pi r_1h_1(t_{f1}-t_{w1})=q_l=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}}=q_l\,|_{r_2}=2\pi r_2h_2(t_{w2}-t_{f2}) \quad (4\text{-}60)$$

$$q_l=\frac{t_{f1}-t_f}{\frac{1}{h_12\pi r_1}+\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{1}{h_22\pi r_2}}=\frac{t_{f1}-t_{f2}}{R_l}\quad (\text{W/m}) \quad (4\text{-}61)$$

式中，R_l 为通过单位长度圆筒壁传热过程的热阻，单位为 m · K/W。R_l 的表达式为

$$R_l=\frac{1}{h_12\pi r_1}+\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{1}{h_2\pi r_2}=\frac{1}{h_1\pi d_1}+\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}+\frac{1}{h_2\pi d_2} \quad (4\text{-}62)$$

（2）多层圆筒壁

利用上述求解过程对第三类边界条件下的多层圆筒壁的导热进行计算，这里不详细介绍计算过程，仅给出结果。第三类边界条件下多层圆筒壁的热流量为

$$q_l=\frac{t_{f_1}-t_{f_2}}{\frac{1}{h_1\pi d_1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi\lambda_1}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}+\frac{1}{h_2\pi d_{n+1}}} \quad (4\text{-}63)$$

例 4-3 多层圆筒壁导热

已知一个内径为 2cm 外径为 4cm 的厚壁不锈钢管（18%Cr，8%Ni，λ=19 W/m · K），外壁上覆盖着 3cm 的石棉绝缘层（λ=0.2 W/m · K），绝缘层外壁温度为 100℃。如果管内壁温度保持恒温 600℃，试计算单位长度上的热损失和绝缘层内壁的温度。

解：单位长度的热流量为

$$\frac{q}{L}=\frac{2\pi(T_1-T_2)}{\ln(r_2/r_1)/\lambda_s+\ln(r_3/r_2)\lambda_a}=\frac{2\pi(600-100)}{(\ln2)/19+(\ln2.5)/0.2}=680\text{W/m}$$

热流量用来计算管外壁和绝缘层内壁之间的界面温度。有

$$\frac{q}{L}=\frac{T_a-T_2}{\ln(r_3/r_2)/2\pi\lambda_a}=680\ \mathrm{W/m}$$

式中，T_a 为界面温度。因此可得

$$T_a=595.8℃$$

可见，绝缘层的热阻影响很大，温度降绝大部分发生在绝缘层，从而有效地保证了热量不致散发到周围环境。

3. 通过球壳的稳态导热

通过对直角坐标系下的导热微分方程进行坐标变换(图 4.22)，可得球坐标系下的导热微分方程为

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\lambda\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\lambda\frac{\partial t}{\partial \phi})+q_v \tag{4-64}$$

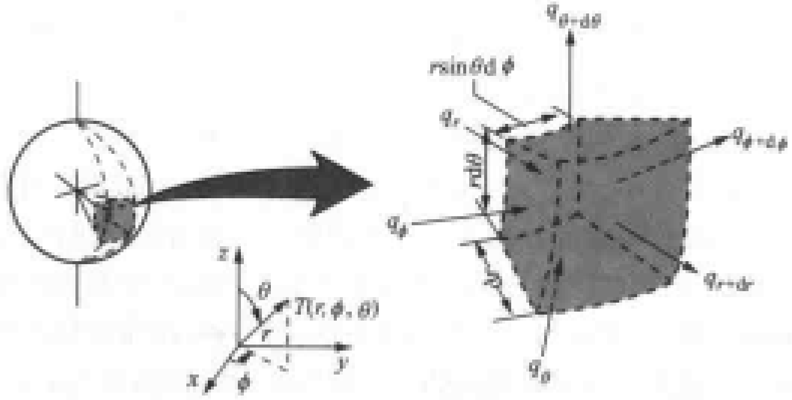


图 4.22　球坐标系中的微元体

对于内、外表面维持均匀恒定温度的空心球壁的导热，在球坐标系中也是一维导热问题。假设热导率 λ 为常数，无内热源。则

导热微分方程为：
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r^2\frac{\partial t}{\partial r})=0 \tag{4-65}$$

通过积分求解，可得

温度分布
$$t=t_2+(t_1-t_2)\frac{1/r-1/r_2}{1/r_1-1/r_2} \tag{4-66}$$

热流量
$$\Phi=\frac{4\pi\lambda(t_1-t_2)}{1/r_1-1/r_2} \tag{4-67}$$

导热热阻
$$R=\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \tag{4-68}$$

4. 其他变面积或变热导率问题

对于热导率为变数或沿导热热流密度矢量方向导热截面积为变量的情形，可通过直接得出导热热流量的计算式进行计算。此时，热导率一般可表示为温度的函数 $\lambda(t)$。以一维问题为例，傅里叶定律的表达式为

$$\Phi=-A(x)\lambda(t)\frac{dt}{dx} \tag{4-69}$$

分离变数后积分，并注意到热流量 Φ 与 x 无关可得

$$\Phi\int_{x1}^{x2}\frac{dx}{A(x)}=-\int_{t1}^{t2}\lambda(t)dt \tag{4-70}$$

即

$$\Phi\int_{x1}^{x2}\frac{\mathrm{d}x}{A(x)}=-\int_{t1}^{t2}\lambda(t)\mathrm{d}t\,\frac{(t_2-t_1)}{t_2-t_1} \tag{4-71}$$

显然，式中 $\dfrac{-\int_{t1}^{t2}\lambda(t)\mathrm{d}t}{t_2-t_1}$ 项是 λ 在 t_1 至 t_2 范围内的积分平均值，可用 $\bar{\lambda}$ 来表示。于是式(4-71)可写成

$$\Phi=\frac{\bar{\lambda}(t_1-t_2)}{\int_{x1}^{x2}\frac{\mathrm{d}x}{A(x)}} \tag{4-72}$$

只要把具体问题中的 A 与 x 的关系代入上式就可得到适用于具体情况的计算公式。

在工程计算中，许多材料的热导率对温度的依变关系为线性关系。式(4-72)中的 $\bar{\lambda}$ 就是算术平均温度 $\bar{t}\left(=\frac{t_1+t_2}{2}\right)$ 下的 $\bar{\lambda}$ 值。因此只要取用算术平均温度下的热导率 $\bar{\lambda}$ 值，前面导得的定热导率的公式就可适用于变热导率问题。

5. 通过肋片(Fin)的稳态导热(表面有散热的长杆的导热)

工程上在一些换热设备中，为了增大换热面积、强化换热，一般采取在换热面上加装肋片的途径。肋片通常是指依附于零件基础表面上的扩展面。如：钢片式暖气片、汽车水箱及家用冰箱、空调换热器加装的肋片等。扩展面的形状有针肋、直肋、环肋和大套片等不同形状。

肋片的分类多种多样，主要有以下两种分类方法：第一种，按照肋片的形状可分为直肋、环肋；第二种，按照肋片的截面可分为等截面肋片、变截面肋片，如图 4.23，4.24 所示。



图 4.23　现实生活中常见的肋片

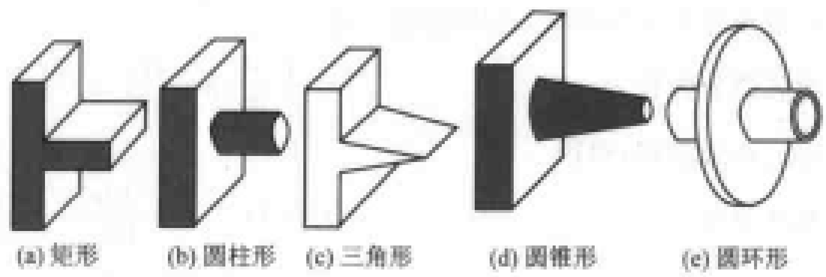


图 4.24　几种典型的肋片结构

计算肋片导热量的关键问题是具体分析肋片的导热特点。即将基础面看作是长杆的导热，而在扩展面方向上同时具有对流换热及辐射散热，并导致肋片中沿导热热流传递的方向上热流量是不断变化的。对于长杆，无论截面形状如何，导热均可作为一维。当它的表面存在散热时，就是第三类边界条件下通过平壁的一维稳态导热，其导热热流量为

$$\Phi=\frac{t_{f1}-t_{f2}}{\frac{1}{h_1A}+\frac{\delta}{\lambda A}+\frac{1}{h_2A}}\quad(\mathrm{W}) \tag{4-73}$$

下面按照不同情况讨论肋片导热量的计算。

1) 等截面直肋的稳态导热

肋片中的温度场实际上是三维的。其温度分布取决于内部 x,y,z 三个方向的导热热阻

以及表面与流体之间的对流换热热阻。但求解二维、三维导热问题十分复杂，在满足工程需要的前提下，将问题进行简化。提出假设如下：

(1) 肋片在垂直于纸面方向很长，不考虑温度沿该方向的变化，因此可取单位长度来分析；

(2) 材料的热导率 λ 及表面传热系数 h 均为常数，沿肋高方向肋片横截面积 A 保持不变；

(3) 表面上的传热热阻 $1/h$ 远远大于肋片中的导热热阻 δ/λ，因而认为温度沿厚度变化很小；

(4) 肋片顶端可视为绝热，即在肋的顶端无热量导出。

经过上述简化，所研究的问题就可按照一维稳态导热问题处理。现对图 4.25 所示的微元体进行分析。已知微元体截面积为 $A=l\delta$，周长为 $U=2(l+\delta)$，换热面积为 U_{dx}。可得其热平衡方程为

$$\Phi_x = \Phi_{x+dx} + \Phi_c \tag{4-74}$$

式(4-74)中，$\Phi_x=-\lambda A\dfrac{dt}{dx}$，$\Phi_c=hU dx(t-t_\infty)$，

$$\Phi_{x+dx}=\Phi_x+\frac{d\Phi_x}{dx}dx=-\lambda A\frac{dt}{dx}-\frac{d}{dx}(\lambda A\frac{dt}{dx})dx。$$

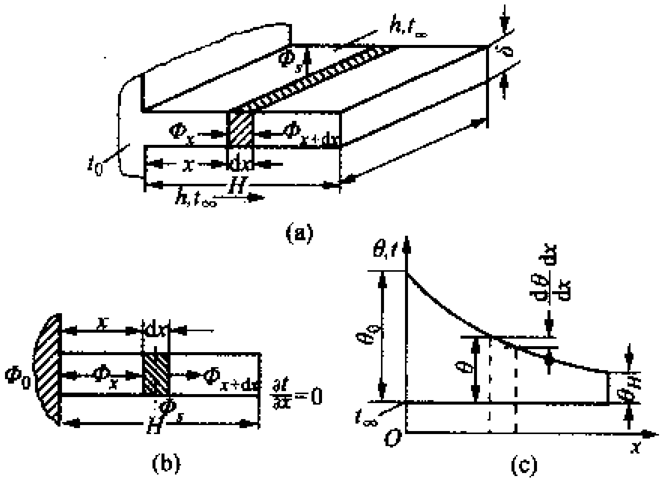


图 4.25　等截面直肋稳态导热的计算

假设 λ 与 A 为常数，由此可得导热微分方程为

$$\frac{d^2t}{dx^2}-\frac{hU}{\lambda A}(t-t_\infty)=0 \tag{4-75}$$

边界条件为：$x=0$，$t=t_0$；$x=H$，$-\lambda\dfrac{dt}{dx}\Big|_H=0$

令 $\dfrac{hU}{\lambda A}=m^2$，并引入过余温度 $\theta=t-t_\infty$，则导热微分方程变为齐次方程

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0 \tag{4-76}$$

式(4-76)是一个二阶线性齐次常微分方程，其通解为

$$\theta=C_1e^{mx}+C_2e^{-mx} \tag{4-77}$$

由边界条件，可确定 C_1，C_2，有

$$C_1=\theta_0\frac{e^{-mH}}{e^{mH}+e^{-mH}}$$

$$C_2=\theta_0\frac{e^{mH}}{e^{mH}+e^{-mH}}$$

最后可得肋片中的温度分布(图 4.26)：

$$\theta=\theta_0\frac{e^{m(H-x)}+e^{-m(H-x)}}{e^{mH}+e^{-mH}}=\theta_0\frac{\cosh[m(H-x)]}{\cosh(mH)}\qquad(4\text{-}78)$$

令 $x=H$，可算得肋端的过余温度为

$$\theta_H=\theta_0\frac{1}{\cosh(mH)}\qquad(4\text{-}79)$$

或

$$\frac{\theta_H}{\theta_0}=\frac{1}{\cosh(mH)}\qquad(4\text{-}80)$$

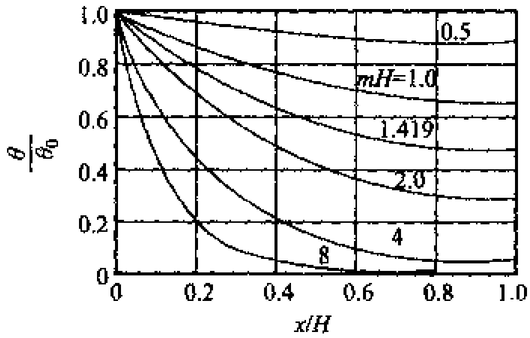


图 4.26　肋片温度分布图

在稳态条件下，由肋片散入外界的全部热流量都必须通过 $x=0$ 处的肋根截面，将式(4-78)的 θ 代入傅里叶定律的表达式，即得肋片表面的散热量

$$\Phi=-\lambda A\frac{d\theta}{dx}\bigg|_{x=0}=\lambda A\theta_0 m\cdot\tanh(mH)=\sqrt{hU\lambda A}\theta_0\cdot\tanh(mH)\qquad(4\text{-}81)$$

式中，$\tanh(mH)=\frac{e^{mH}-e^{-mH}}{e^{mH}+e^{-mH}}$ 是双曲正切函数。

上述推导中虽然忽略了肋端的散热(认为肋端绝热)，但对于一般工程计算，尤其对于高而薄的肋片，所得的结果已经足够精确。有时一些肋片则必须考虑肋端散热，可取 $H_c=H+\delta/2$，即将肋端放在两侧面加以考虑。在上述分析中，近似认为肋片温度场为一维。当 $Bi=h\delta/\lambda\leqslant0.05$时，误差小于 1%，可以满足工程计算精度。但对于短而厚的肋片，上述算式不适用，应作为二维温度场进行考虑计算。需要指出的是，实际上沿整个肋片表面上表面传热系数 h 是不均匀的，但可以按其平均值来计算。如果具体问题涉及严重的不均匀性，则需采用数值方法进行计算。

值得注意的是，敷设肋片不一定就能强化传热，只有满足一定的条件才能增加散热量，因此在设计肋片时要注意这一点。

例 4-4　肋片散热

已知：一个壁面上伸出一根纯铝的等截面直肋，已知肋片厚度 l 为 3mm，垂直于壁面的长度 L 为 7.5cm，热导率为 $\lambda=200\text{W/(m}\cdot\text{K)}$，如图 4.25 所示。肋根的温度恒为 573K，周围环境温度为 323K，表面传热系数 $h=10\text{W/(m}^2\cdot\text{K)}$。试计算垂直纸面方向单位长度肋片的热损失。

解：在计算肋片散热时，可近似地将肋端截面折入肋长中。有

$$L_c=L+l/2=7.5+0.3/2=7.65\text{cm}$$

$$m=\sqrt{\frac{hU}{\lambda A_f}}=\sqrt{\frac{h(2z+2l)}{\lambda zl}}\approx\sqrt{\frac{2h}{\lambda l}}$$

当肋片沿垂直纸面方向的长度 $z\gg l$ 时，有

$$m=\left[\frac{2\times 10}{200\times 3\times 10^{-3}}\right]^{\frac{1}{2}}=5.774$$

因此就有

$$\Phi=\tanh(mL_c)\cdot\sqrt{hU\lambda A_f}\theta_0$$

当长度 $z=1\text{m}$ 时

$$A_f=1\times 3\times 10^{-3}=3\times 10^{-3}\text{m}^2$$

$$\Phi=5.774\times 200\times 3\times 10^{-3}\tanh(5.774\times 0.0765)=359\text{W/m}$$

2) 肋片效率(Fin efficiency)

通常从散热的角度评价加装肋片后换热效果。肋片效率是指在肋片表面平均温度 t_m 下，肋片的实际散热量 Φ 与假定整个肋片表面都处在肋基温度 t_0 时的理想散热量 Φ_0 的比值。由定义可得

$$\eta_f=\frac{\Phi}{\Phi_0}=\frac{hUH(t_m-t_\infty)}{hUH(t_0-t_\infty)}=\frac{\theta_m}{\theta_0}<1 \tag{4-82}$$

当 $t_m=t_0$ 时，$\eta_f=1$，即相当于热导率 $\lambda\to\infty$ 时的情况。

所以

$$\eta_f=\frac{\tanh(mH)}{mH} \tag{4-83}$$

式中，$m=\sqrt{\frac{hU}{\lambda A}}$。

因此，式(4-82)又可写为

$$\eta_f=\frac{\Phi}{\Phi_0}=\frac{hUH(t_m-t_\infty)}{hUH(t_0-t_\infty)}=\frac{\tanh(mH)}{mH} \tag{4-84}$$

或

$$\eta_f=\frac{\Phi}{\Phi_0}=\frac{\sqrt{hU\lambda A}\theta_0\tanh(mH)}{hUH\theta_0}$$

$$=\sqrt{\frac{\lambda A}{hU}}\frac{\tanh(mH)}{H}=\frac{\tanh(mH)}{mH} \tag{4-85}$$

影响肋片效率的因素很多，主要有肋片材料的热导率 λ、肋片表面与周围介质之间的表面传热系数 h、肋片的几何形状和尺寸(U,A,H)。

分析肋片效率计算式，可知$\frac{\tanh(mH)}{H}$的数值随 mH 的增加而趋于一定值($mH\sim 3$ 数值基本不变)。

分析式(4-81)和式(4-83)可知，当 m 数值一定时，随着肋片高度 H 增加，Φ 先迅速增大，但逐渐增量越来越小，最后趋于一定值。当 H 继续增加到一定程度，再继续增加 H 将导致肋片效率的降低。

从图 4.27 可以看出，当 mH 的数值较小时，η_f较高。在高度 H 一定时，较小的 m 有利于提高 η_f。为了提高肋片效率，肋片应选用热导率较大的材料；而当 λ 和 h 都给定时，m 随 U/A 的降低而降低。U/A 取决于肋片几何

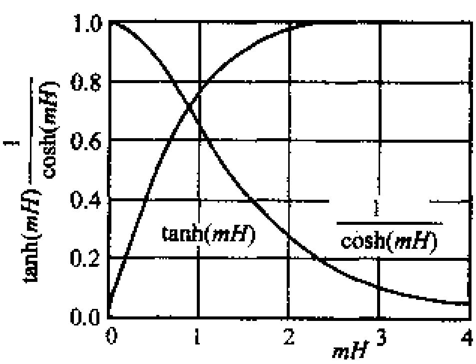


图 4.27　肋效率关系

形状和尺寸。

只有肋效率 $\eta_f>80\%$ 的肋片才经济实用，图4.28给出了不同剖面肋片的效率曲线。

在保持散热量基本不变的前提下，采用变截面肋片可以达到减轻肋片重量、节省材料的目的。限于篇幅，在此对变截面肋片不做更多的论述。

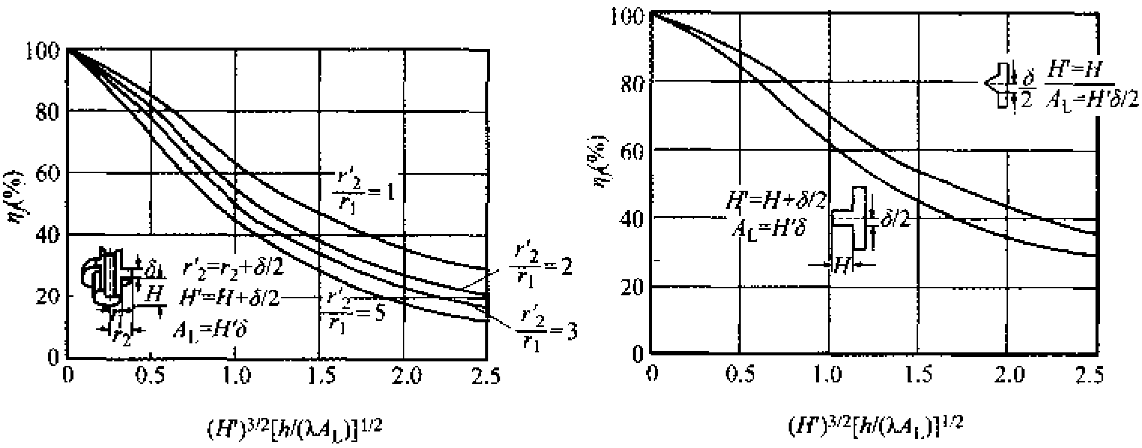


图 4.28 不同剖面肋片的效率曲线

肋片散热量的计算方法通常有以下几种：

（1）由图线或计算公式得到 ηf ；

（2）计算出理想情况下的散热量 $\Phi_0=hUH(t_0-t_\infty)$；

（3）由式 $\Phi=\eta_f\Phi_0$ 计算出实际散热量 Φ。

在设计肋片时，首先要考虑肋片的质量、制造的难易程度、价格和空间位置的限制等，选择合适的形状，并对散热效率以及散热量进行计算，以确定符合要求的肋片。

3）通过接触面的导热

在讨论多层平壁导热时，假定两固体表面直接接触的界面是紧密结合无间隙的，但实际固体表面不是理想平整的，两固体表面直接接触的界面容易出现点接触，或者只是部分的而不是完全的、平整的面接触，而导致额外的导热热阻。这种由接触界面间隙产生的热阻称为接触热阻(Thermal contact resistance)(图4.29)。

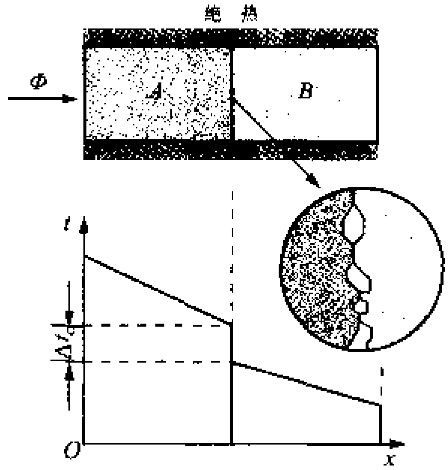


图 4.29 通过接触面的导热示意图

当界面上的空隙中充满热导率远小于固体的气体时，接触热阻的影响更突出；当两固体壁具有温差时，接合处的热传递机理为接触点间的固体导热和间隙中的空气导热之和，对流和辐射的影响一般不大。

在有接触热面的热阻计算中，面积热流量为

$$q=\frac{t_1-t_3}{\dfrac{\delta_A}{\lambda_A}+r_c+\dfrac{\delta_B}{\lambda_{AB}}} \tag{4-86}$$

则

$$t_1-t_3=q\left(\frac{\delta_A}{\lambda_A}+r_c+\frac{\delta_B}{\lambda_{AB}}\right) \tag{4-87}$$

式中，$r_c=\frac{\Delta t_c}{q}$为界面接触热阻。

由式(4-87)可知：

(1) 当热流量不变时，接触热阻 r_c 较大时，必然在界面上产生较大温差；

(2) 当温差不变时，面积热流量必然随着接触热阻 r_c 的增大而下降；

(3) 即使接触热阻 r_c 不是很大，若热流量很大，界面上的温差是不容忽视的。

例如，当 $q=6\times10^5\,\text{W/m}^2$，$r_c=2.64\times10^{-4}\,\text{m}^2\text{K/W}$ 时，$\Delta t_c=q\cdot r_c=158.4℃$。

接触热阻的影响因素主要有：第一，固体表面的粗糙度；第二，接触表面的硬度匹配；第三，接触面上的挤压压力；第四，空隙中的介质的性质。

在实验研究与工程应用中，消除接触热阻很重要。为了减小接触热阻，实用上可在接触界面上加一片薄铜皮或类似银等延展性好、热导率高的材料，或者涂一薄层热姆涂油或硅油。这些简单易行的措施都能收到显著的效果。使用在微电子行业的先进的电子封装材料（AIN），热导率达 400 以上。

4.2.1.2　二维稳态导热问题与形状因子

工程上经常遇到二维和三维稳态导热问题，例如房间墙角的传热、热网地下埋设管道的热损失、短肋片导热等。限于篇幅，在此对二维稳态导热问题进行一些简单讨论。

式(4-88)是对导热微分方程式进行简化后所获的二维、常物性、无内热源的导热微分方程式

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0 \tag{4-88}$$

对于二维导热的求解方法，通常有以下三种：分析解法（简单形状、线性边界条件）；数值计算（复杂形状、复杂边界条件）；适于工程计算的、两边界上的温度恒定的问题可以利用导热形状因子。

下面介绍分析解法以及利用导热形状因子进行计算的方法。

(1) 分析解法（简单形状、线性边界条件）

利用分析解法对二维稳态导热进行计算的方法通常是分离变量法(图4.30)。

导热微分方程为　$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0$

边界条件为　$t(0,y)=t_1$；$t(b,y)=t_1$

$t(x,0)=t_1$；$t(x,\delta)=t_2$

这是个关于温度的齐次方程，为能采用分离变量法，需要将其边界条件表达式也齐次化（最多只能包含一个非齐次边界条件）。所谓齐次边界条件是指边界上的被求函数或其一阶法向导数为零的边界条件。

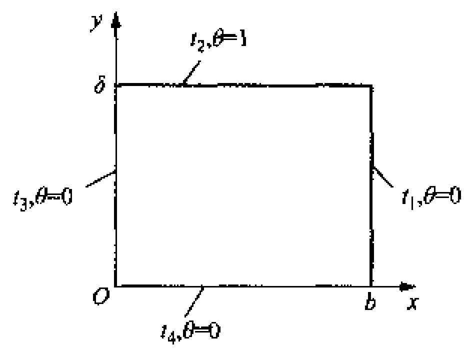


图 4.30　矩形区域中的二维稳态导热

为此，引进以下量纲为 1 的过余温度作为求解变量：

$$\Theta=\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \tag{4-89}$$

于是上述方程变为

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=0 \tag{4-90}$$

边界条件变为

$$\Theta(0,y)=0;\Theta(b,y)=0$$
$$\Theta(x,0)=0;\Theta(x,\delta)=1$$

采用分离变量法，令 $\Theta(x,y)=X(x)Y(y)$

并利用傅里叶级数，可得出温度场的分析解

$$\Theta(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\sin\frac{n\pi x}{b}\frac{\sinh(n\pi y/b)}{\sinh(n\pi\delta/b)} \tag{4-91}$$

(2) 导热形状因子法

比较平壁、圆筒壁和球壁导热热量计算式的导出过程，可以发现两个等温面间的导热热量计算总是可以表示成统一的形式：

$$\Phi=\lambda S(t_1-t_2) \tag{4-92}$$

式中，S 称为形状因子，它与导热物体的形状及大小有关，其单位为 m。它取决于等温面面积沿热流途径改变的性质。

理论分析表明，式(4-92)是个适用于任何形状的通式，它可以用于二维或三维问题中两个等温面间的导热热量计算。只要确定已知特定几何条件下的形状因子 S，导热热流量就可利用式(4-92)算出。这样，对于前述的平壁、圆筒壁和球壁的导热，可以分别求得其形状因子后，很方便地进行计算。

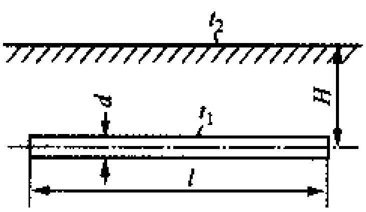
平壁 $S=\dfrac{A}{\delta}$

圆筒壁 $S=\dfrac{2\pi l}{\ln\dfrac{d_2}{d_1}}$

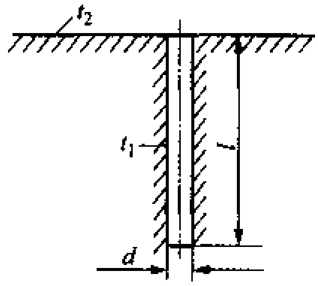
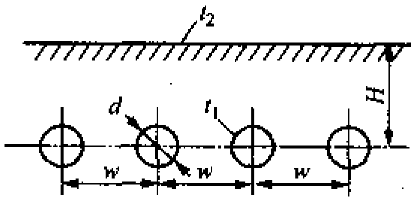
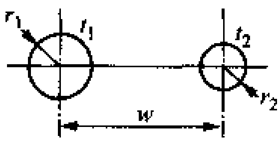
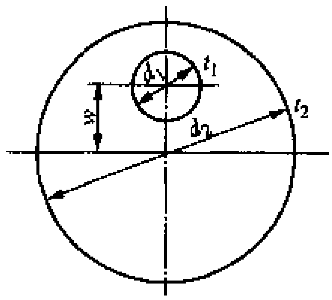
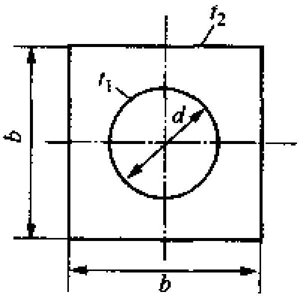
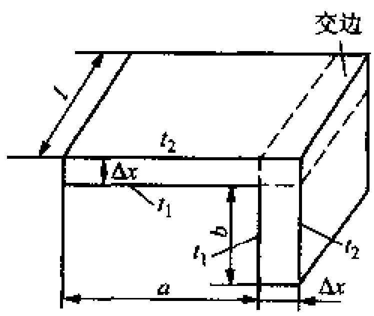
球壁 $S=\dfrac{\pi d_1 d_2}{\delta}$

表 4.1 列出了通过理论或实验方法得出的一些特殊几何形状的形状因子计算式(对于几何形状或边界条件过于复杂，无现成的形状因子可应用时需用数值法求解。更详尽的资料，可参阅有关文献)。

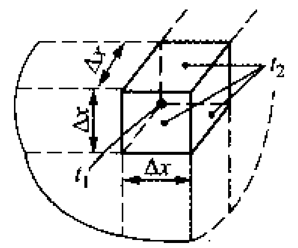
表 4.1 几种几何条件下的形状因子 S

1	地下埋管	 	$d\ll H$ 和 $H\ll l$ 时 $S=\dfrac{2\pi l/\ln\dfrac{2l}{d}}{1+\dfrac{\ln(2H/l)}{\ln(2H/d)}}$ l 无限长时，每米管长的导热形状因子为 $\dfrac{S}{l}=\dfrac{2\pi}{\operatorname{arcosh}\dfrac{2H}{d}}$ 当 $H>2d$ 时，可简化为 $\dfrac{S}{l}=\dfrac{2\pi}{\ln\dfrac{4H}{d}}$

（续表）

2	地下埋管		$d \ll l$ 时 $S=\frac{2\pi l}{\ln\frac{4l}{d}}$
3			$H>d$、$d \ll l$ 时，对于每根管 $S=\frac{2\pi l}{\ln\left[\frac{2w}{\pi d}\sinh\left(2\pi\frac{H}{w}\right)\right]}$ l 为管子长度。
4	地下深埋双管道之间的导热		管长 $l \gg d_1$ 时($d_1>d_2$) $S=\frac{2\pi l}{\text{arcosh}\frac{w^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1 r_2}}$
5	管道偏心热绝缘		管长 $l \gg d_2$ 时 $S=\frac{2\pi l}{\ln\frac{\sqrt{(d_2+d_1)^2-4w^2}+\sqrt{(d_2-d_1)^2-4w^2}}{\sqrt{(d_2+d_1)^2-4w^2}-\sqrt{(d_2-d_1)^2-4w^2}}}$
6	圆管外包方形绝缘层		管长 $l \gg$ d 时 $S=\frac{2\pi l}{\ln\left(1.08\frac{b}{d}\right)}$
7	炉墙与交边		内尺寸 a 和 b 均大于 $\frac{1}{5}\Delta x$ 时 $S=\frac{al}{\Delta x}+\frac{bl}{\Delta x}+0.54l$

（续表）

8	炉墙交角		$S=0.15\Delta x$

例 4-5 形状因子的应用

已知：一个直径为 15cm、长度为 4m 的圆管被水平地埋在地下 20cm 处。管壁温度为 75℃，此时泥土温度为 5℃。假设泥土的热导率 $\lambda=0.8\mathrm{W/(m\cdot ℃)}$。试计算管子的热损失。

解：在计算此类问题时可利用形状因子给出的计算式来计算热损失。因为 $H>1.5d$，且 $L\ll H$，则有

$$S=\frac{2\pi l}{\operatorname{arccos}\left(\frac{2H}{d}\right)}=\frac{2\pi(4)}{\operatorname{arccos}\left(\frac{0.20}{0.075}\right)}=15.35\mathrm{m}$$

热损失则可由下式计算

$$q=\lambda S\Delta t=(0.8)(15.35)(75-5)=859.6\mathrm{W}$$

例 4-6 形状因子的应用

已知：一个内空腔的长宽高均为 50cm 的小火炉，内壁为耐火砖，其热导率为 $\lambda=1.04\mathrm{W/(m\cdot ℃)}$，壁厚为 10cm。小火炉的内壁始终保持 500℃，环境温度恒为 50℃。试计算通过炉壁的热损失。

解：通过将壁面、边和角的形状因子相加获得总的形状因子

壁面：$S=\dfrac{A}{\Delta x}=\dfrac{(0.5)(0.5)}{(0.1)}=2.5\mathrm{m}$

边：$S=0.54l=(0.54)(0.5)=0.27\mathrm{m}$

角：$S=0.15\Delta x=(0.15)(0.1)=0.015\mathrm{m}$

小火炉共有六个面、12 条边和 8 个角，则总的形状因子为

$$S=6\times2.5+12\times0.27+8\times0.015=18.36\mathrm{m}$$

总热损失为

$$q=\lambda S\Delta t=1.04\times18.36\times(500-50)=8.592\mathrm{kW}$$

4.2.2 非稳态导热

物体的温度随时间而变化的导热过程称为非稳态导热。许多工程实际问题需要确定物体内部的温度场随时间的变化，或确定其内部温度达到某一限定值所需的时间。例如，对于机器设备在启动、停车及变动工况时，急剧的温度变化会导致部件因热应力而破坏，必须确定物体内部的瞬时温度场；钢制件的热处理也是非常典型的非稳态导热过程，掌握工件中温度变化的速率是控制工件热处理质量的重要因素。因此，对于机械工程加工专业，学习本课程传热学理论的重点是非稳态导热。本节将重点讨论非稳态导热的基本概念；第一类边界条件下半无限大平板的导热问题；第三类边界条件下平板、圆柱体和球体的导热问题及其分析解法和主要结

果。通过学习能够掌握确定瞬态温度场的方法及在一段时间间隔内物体所传导热量的计算方法;研究影响过程的因素及其控制方法。

4.2.2.1　非稳态导热的基本概念

根据物体温度随着时间的推移而变化的特性可以分为两类非稳态导热:瞬态非稳态导热,即物体的温度随时间的推移逐渐趋近于恒定的值;周期性非稳态导热,即物体的温度随时间而作周期性的变化。

本书重点研究瞬态非稳态导热及温度分布。如图 4.31 所示,设有一平壁其初始温度为 t_0。令其左侧表面的温度突然升高到 t_1 并保持不变,而右侧温度仍与温度为 t_0 的空气相接触。在这种非稳态导热过程中,物体中的温度分布存在着两个不同的阶段。在第一阶段里,温度的分布呈现出主要受初始温度分布控制的特性。即在这一阶段物体中的温度分布受初始温度分布的影响很大。将其称为非正规状况阶段。当过程进行到一定深度的时候,物体的初始温度分布的影响逐渐消失,物体中不同时刻的温度分布主要取决于边界条件及物性,此时非稳态导热过程进入到第二阶段,称为正规状况阶段。上述两个不同阶段的存在是第一类非稳态导热与周期性非稳态导热的重要区别。在周期性非稳态导热过程中,物体中各点的温度及热流量都随时间作周期性的变化。需要指出的是,无论对哪一类非稳态导热过程,由于在热量传递的路径中,物体各处本身温度的变化要积聚或消耗热量,所以即使对穿过平壁的导热来说,其非稳态导热过程中,在与热流方向相垂直的不同截面上,所通过的热流量也是处处不相等的,这正是非稳态导热区别于稳态导热的一个特点。图 4.32 中定性的表示出了从平壁左侧面导入的热流量 Φ_1 不等于从右侧面导出的热流量 Φ_2 的特点。图 4.32 还表示,随着过程的进行,两者趋于一致。图中阴影部分代表平板升温过程中积蓄的能量。

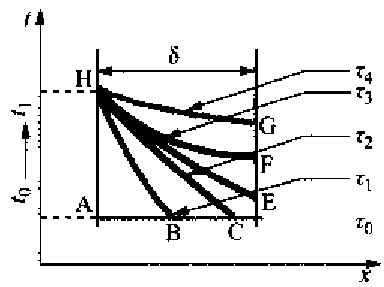


图 4.31　非稳态导热示意图

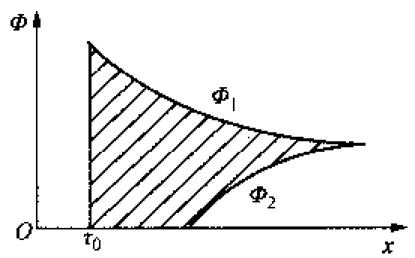


图 4.32　非稳态导热材料升温过程能量的积蓄

4.2.2.2　第一类边界条件下一维非稳态导热的分析解

导热微分方程、初始条件和边界条件完整地描述了一个特定的非稳态导热问题。非稳态导热问题的求解就是在规定的初始条件和边界条件下求解导热微分方程。基于目前在数学上对导热微分方程的求解水平,仅可以得出部分非稳态导热问题的分析解。包括典型的简单几何形状,如平壁、圆筒壁、球壁及半无限大平板和无限长柱体。

所谓半无限大物体是指物体一端面为一平面所限制,而另一端面延伸到无限远的物体。数学上,取 y 坐标轴沿平面界面,x 坐标轴沿界面法线方向,则半无限大物体占有 $x\geqslant 0$、y 从 $-\infty$ 至 ∞ 的区域。对于有限厚度的平壁,单面受热时,只要平壁的另一侧未受到升温波及就可

应用半无限大物体的理论公式。例如铸造中砂型的受热升温问题，只要在工程上有意义的时间内，砂型外侧未被升温波及，即可认为是半无限大物体(图 4.33)。

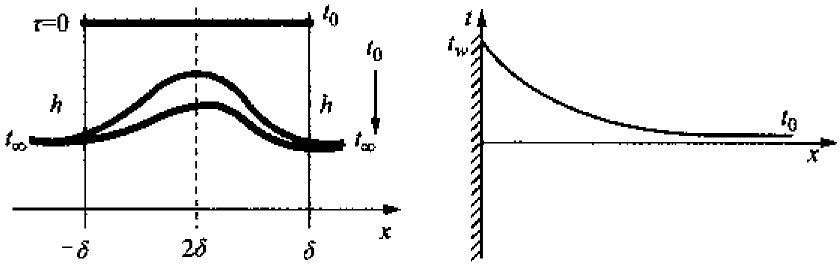


图 4.33 无限大平板与半无限大平板中温度分布示意图

对于常物性一维非稳态导热适用的微分方程为

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \tag{4-93}$$

非稳态导热过程开始以前，物体所处的环境温度为 t_0，故初始条件可表示成

$$\tau=0 \text{ 时} \qquad t=t_0= \text{定值}$$

对最简单的第一类边界条件作分析，即过程开始时，壁表面温度瞬时升高并维持在恒定的温度 t_w，即

$\tau>0$ 时，$x=0$ 处　　$t=t_w=$定值

引入过余温度 $\theta=t-t_w$，$\theta_0=t_0-t_w$，可得微分方程式在上述初始及边界条件下的理论解为

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-y^2}dy = \text{erf}(x/\sqrt{4a\tau}) = \text{erf } N \tag{4-94}$$

上式中，$N=x/\sqrt{4a\tau}$，erf N 为高斯误差函数，它的数值可按 N 值从附录 10 中查出，如图 4.34 所示，erf N 随 N 的变化。从上式可以看出，无量纲温度$\frac{\theta}{\theta_0}$仅与无量纲坐标 $x/\sqrt{4a\tau}$有关。当 $N=2$ 时，$\frac{\theta}{\theta_0}=\text{erf}(2)=0.9953$。此时，即可认为由 $N=2$ 确定的 x 点处温度没有变化。因此当 $N\geqslant2$ 时，$\tau\leqslant\frac{x^2}{16a}$，表明对于选定的 x 点，此时可认为其不受表面温度变化波及，故该时间就是 x 点的惰性时间。所谓惰性时间，实际上是一个表明在一定条件下，材料中热量传递及扩散能力的指标。惰性时间的大小与表面温度无关，与深度 x 的平方成正比，与热扩散率 a 成反比。热扩散率越小，惰性时间越大。

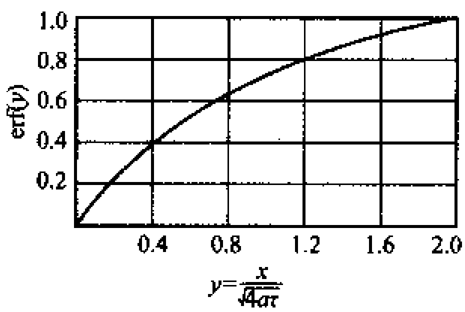


图 4.34 erf N 随 N 的变化图

因此，对位置而言，若 $N\geqslant2$ 可得 $x\geqslant4\sqrt{a\tau}$，即对一厚度为 2δ 的平板，若 $x\geqslant4\sqrt{a\tau}$即可作为半无限大物体来处理；对时间而言，若 $N\geqslant2$ 可得 $\tau\leqslant\frac{x^2}{16a}$。对于有限大的实际物体，半无限大物体的概念只适用于物体的非稳态导热的初始阶段，即在惰性时间以内。

由于物体表面上的温度梯度随时间 τ 而变化，所以从傅里叶定律只能解得表面的瞬时热

流量 q_w。先对式(4-94)求导得

$$\frac{\partial t}{\partial x}=(t_0-t_w)\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{erf}(x/\sqrt{4a\tau}))=\frac{t_0-t_w}{\sqrt{\pi a\tau}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right)$$

代入傅里叶定律表达式，得

$$q_w=-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\lambda(t_w-t_0)\frac{1}{\sqrt{\pi a\tau}}=\frac{b}{\sqrt{\pi\tau}}(t_w-t_0) \tag{4-95}$$

可以看出，q_w 随着时间 τ 增加而减少。如果在(0—τ)一段时间内，t_w 保持不变，则式(4-95)中除 τ 以外都是常量。将 q_w 在(0—τ)范围内积分即得整段时间内消耗于加热每平方米半无限大物体的热量 Q_w，Q_w 称累计热量。

$$Q_w=\int_0^\tau q_w\mathrm{d}z=2\lambda(t_w-t_0)\sqrt{\frac{\tau}{\pi a}} \tag{4-96}$$

可以看出，Q_w 与时间 τ 的平方根成正比，即随时间增加而递增，但增加势头逐渐减小。这与温度梯度的变化相对应。

在式(4-96)中，材质不同的影响体现在 $\lambda/\sqrt{a}$ 上。物性的这种组合可表示成

$$\frac{\lambda}{\sqrt{a}}=\sqrt{\rho c\lambda}=b \tag{4-97}$$

式中，b 称为蓄热系数，完全由材料的热物性决定。蓄热系数是材料的物性参数，综合反映了材料的蓄热和导热能力。

例 4-7　蓄热系数

已知：一大型平壁状铸铁件在金属型中凝固冷却。设金属型内侧表面温度维持在 1 300℃不变，金属型初始温度为 25℃，热扩散率 $a=1.58\times10^{-5}\mathrm{m^2/s}$。试求浇铸后 2 小时金属型中离内侧表面 80mm 处的温度。

解：首先求出 N 值，然后通过查表查出 erf N

$$N=\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}=\frac{80\times10^{-3}}{2\sqrt{1.58\times10^{-5}\times2\times3\,600}}=0.352$$

从附录查得 erf 0.352=0.381 3

利用下式，可以求得温度

$$t=t_w+(t_0-t_w)\mathrm{erf}\,N=1\,300+(25-1\,300)\times0.3813=814℃$$

4.2.2.3　伴有相变边界一维非稳态导热的特例

不考虑液体发生对流，讨论半无限大物体伴有相变边界一维非稳态导热问题。这种情况比较复杂。在实际工程中，对这类问题需要求解的是所谓的凝固速度、凝固层厚度和凝固时间。

假定浇注入型腔的液态金属处于熔点 t_w，液体金属在固-液交界面释放出凝固潜热 L 而凝固。由于金属固体的热导率大，故可在不致引起太大误差的前提下，在计算中忽略金属内部由于导热引起的温降。令凝固层厚度为 ξ，凝固速度 $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\tau$ 可由下式确定：

$$q_w=-\rho L\frac{\partial\xi}{\partial\tau} \tag{4-98}$$

式中，q_w 为铸件释放出的热流量，负号表示其传递方向与厚度 ξ 增加的方向相反；ρ 为固体金

属的密度。

实际上，液体金属的浇注温度 t_p 往往高于熔点，即带有过热度。此时由于过热度所释放的热量只占凝固时总释放热量的5%～6%，因此采用近似方案用每千克金属从浇注温度降到熔点的固体释放出的总热量 $L+c(t_p-t_w)$ 来替代 L。此处 c 为金属的比热容。于是可得

$$q_w=-\rho[L+c(t_p-t_w)]\frac{\partial\xi}{\partial\tau} \tag{4-99}$$

铸件释放出的热流量全部由铸型吸收，所以式(4-95)的 $q_w=-q_w$。此处的负号是因为 q_w 总取正值而引入的。于是

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{b(t_w-t_0)}{\sqrt{\pi\tau}\rho[L+c(t_p-t_w)]} \tag{4-100}$$

在 $(0,\tau)$ 范围内积分，得凝固层厚度 ξ 的表达式

$$\xi=\frac{2b(t_w-t_0)}{\sqrt{\pi}\rho(L+c(t_p-t_w))}\sqrt{\tau}=K\sqrt{\tau}\quad \text{m} \tag{4-101}$$

此式称为平方根定律表达式，即凝固层厚度 ξ 与凝固时间 τ 的平方根成正比。它是凝固层厚度的基本计算式。式中

$$K=\frac{2b(t_w-t_0)}{\sqrt{\pi}\rho(L+c(t_p-t_w))}\quad \text{m/s}^{1/2} \tag{4-102}$$

K 称为凝固系数，它与铸型材料物性以及铸件的金属物性、过热度有关。物理意义上，由于 $\tau=1$ 时 $K=\xi$，它可代表最初单位时间内的凝固层厚度，凝固系数由实验确定。

凝固速度的表达式(4-100)改用凝固系数表达时有以下形式：

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{1}{2}\frac{K}{\sqrt{\tau}}\quad m/\text{s} \tag{4-103}$$

若厚度为 δ 的平板铸件可向两侧铸型散热时，则当凝固厚度达到 $\zeta=\delta/2$ 时全部凝固完毕。代入式(4-101)可得平板铸件达到全部凝固的凝固时间为

$$\tau=\frac{\xi^2}{K^2}=\frac{\delta^2}{4K^2} \tag{4-104}$$

4.2.2.4 第三类边界条件下一维非稳态导热

本节讨论第三类边界条件下的一维非稳态导热，即无限大平板的温度场与累计热量的求解，包括工程计算上非常实用的线算图——诺谟图及其应用。

1. 无限大平板的温度场与累计热量的求解、毕渥准则数和傅里叶准则数

厚度有限而宽广无限的平壁数学上称为无限大平板。所谓无限大只是数学上的抽象与简化处理。例如在实际工程中，由于一块平板的长度和宽度远大于其厚度，则平板的长度和宽度的边缘向四周的散热对平板内的温度分布影响很小，在处理时就可把平板内各点的温度分布看作仅是厚度的函数，该平板就是一块无限大平板。

首先以温度均匀、厚度为 2δ 的无限大平板作为讨论对象。平板两侧具有相同的边界条件。由于对称，只需讨论半个壁厚板面温度场的求解。图4.35示出的平板的初始温度为 t_0，在第三类边界条件下冷却，周围介质温度为 t_f。此时，该半块平板的数学描写：

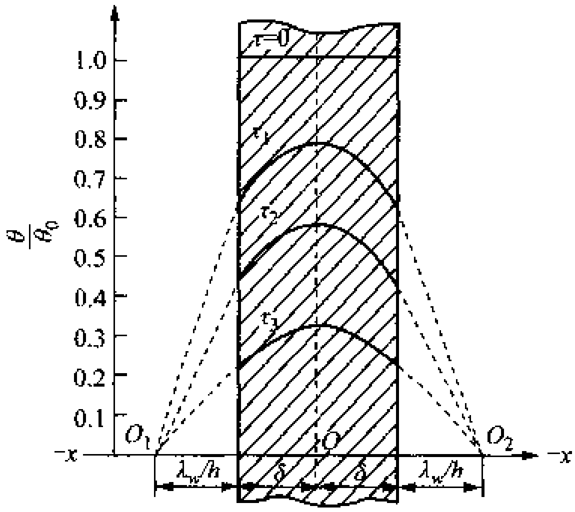


图 4.35　无限大平板在冷却过程中的温度分布

导热微分方程：　$\dfrac{\partial t}{\partial \tau}=a\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2}\quad(0<x<\delta,\ \tau>0)$

初始条件：　$\tau=0$ 时，$t=t_0$

边界条件：　$\tau>0$ 时，$x=0$ 处，$\dfrac{\partial t}{\partial x}=0$（对称性）

$x=\delta$ 处，$-\lambda\dfrac{\partial t}{\partial x}=h(t-t_\infty)$

在此引入过余温度，令 $\theta(x,\tau)=t(x,\tau)-t_\infty$，于是上式化为

导热微分方程：　$\dfrac{\partial \theta}{\partial \tau}=a\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(0<x<\delta,\tau>0)$

初始条件：　$\tau=0$ 时，$\theta=\theta_0$

边界条件：　$\tau>0$ 时，$x=0$ 处，$\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=0$

$x=\delta$ 处，$-\lambda\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=h\theta$

用分离变量法可得其分析解为

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(\beta_n\delta)\cos(\beta_n x)}{\beta_n\delta+\sin(\beta_n\delta)\cos(\beta_n\delta)}e^{-\beta_n^2 a\tau}\tag{4-105}$$

式中，β_n 为离散值，即特征值。

若令 $\mu_n=\beta_n\delta$，则上式可改写为

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n+\sin\mu_n\cos\mu_n}\cos\left(\mu_n\frac{x}{\delta}\right)e^{-\mu_n^2\frac{a\tau}{\delta^2}}\tag{4-106}$$

式中 μ_n 为超越方程 $\cot\mathrm{an}\mu_n=\dfrac{\mu_n}{h\delta/\lambda}$ 的根（图 4.36），其中 $\dfrac{h\delta}{\lambda}$ 为无因次参数，用符号 Bi 表示，称为毕渥准则数。

(4-106)式的指数中，组合 $\dfrac{a\tau}{\delta^2}$ 也是一个无因次的参数，用符号 F_0 表示，称为傅里叶准则数。

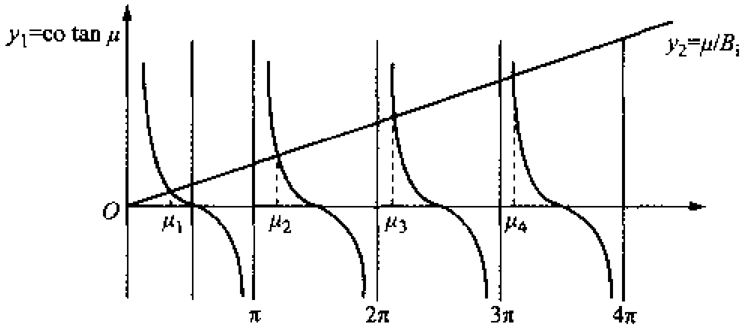


图 4.36 超越方程的根的示意图

分析式(4-106)，由于 μ_n 仅是 Bi 的函数，因此$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}$是 Fo,Bi 和$\frac{x}{\delta}$的函数，即

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}=f\left(Fo,Bi,\frac{x}{\delta}\right) \tag{4-107}$$

值得注意的是，此处 Bi,Fo 等无量纲数都是以平板厚度的一半作为特征长度的；特征值 β_n 与特征数(准则数)是有区别的，β_n 是方程的特征值，而不是准则数。

2. 诺谟图及其应用

前已述及，无量纲的综合量被称为相似准则，简称准则数。在物理现象中，物理量不是单个的起作用而是以准则数这种组合量发挥作用的。无量纲数组成的方程改变了表达形式，但没有改变其描述现象的本质。应当指出：把方程组的解归结为准则关系式是认识上的一个飞跃，它更深刻地反映物理现象的本质，并且使变量的数目大幅度减少。这样不仅有利于表达求解的结果，也更有利于进行实验，进而也影响了分析的结果。各准则数反映了与现象有关的物理量间的内在联系。

如前所述，毕渥准则(Bi)：$\frac{h\delta}{\lambda}$，可以将它表示为$(\delta/\lambda)/(1/h)$，分子是厚度为 δ 的平壁的导热热阻，分母是壁面外的对流换热热阻，所以毕渥准则的物理意义是对比热阻。

同样，傅里叶准则(Fo)：$\frac{a\tau}{\delta^2}$，可以将它表示为 $\tau/(\delta^2/a)$，分子是时间，分母也具有时间的量纲，它反映了热扰动透过平壁的时间，Fo 越大，热扰动就能越快地传播到物体的内部。所以其物理意义是对比时间。

通过许多科学工作者的辛勤劳动，第三类边界条件下一维非稳态导热的分析解已经整理成为便于应用的线算图——诺谟图(图 4.37～图 4.45 是一些常用的诺谟图)。在诺谟图中，坐标及参变量都是无量纲的综合量。

例 4-8 无限大平壁的一维非稳态导热

已知：一板状钢胚(含碳近似为 0.5%)，初始温度为 20℃，$a=5.55\times10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$，热导率为 $\lambda=34\,\mathrm{W/(m\cdot ℃)}$。将之放入 1 200℃的炉子里单侧加热，$h=290\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$，另一侧绝热。试计算将之加热到表面温度低于炉温 15℃时所需的时间，及此时钢板两表面间的温差。

解：由所给条件知

$$\frac{\theta_s}{\theta_0}=\frac{t_s-t_f}{t_0-t_f}=\frac{-15}{20-1\,200}=0.0127$$

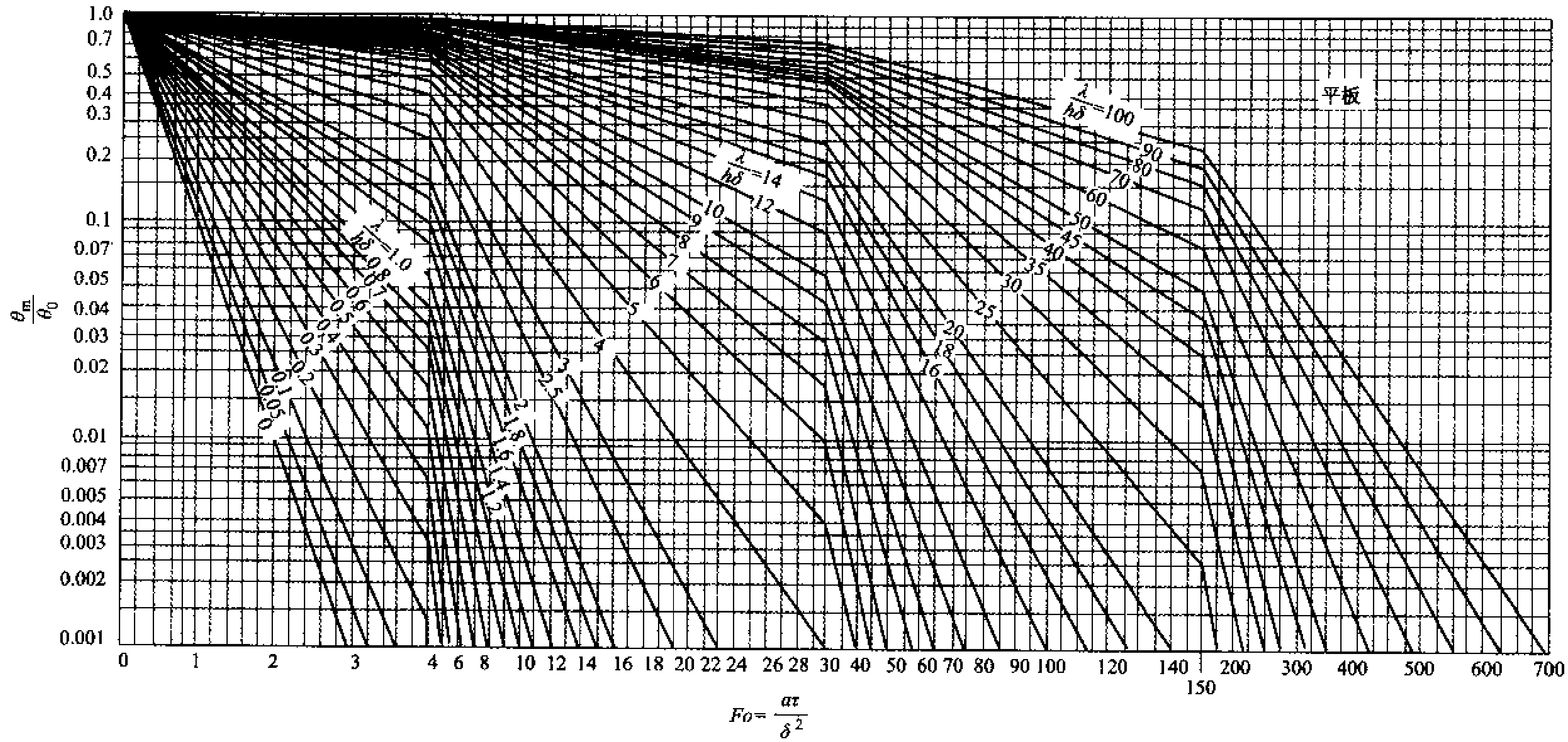


图4.37　无限大平板中心温度的诺谟图

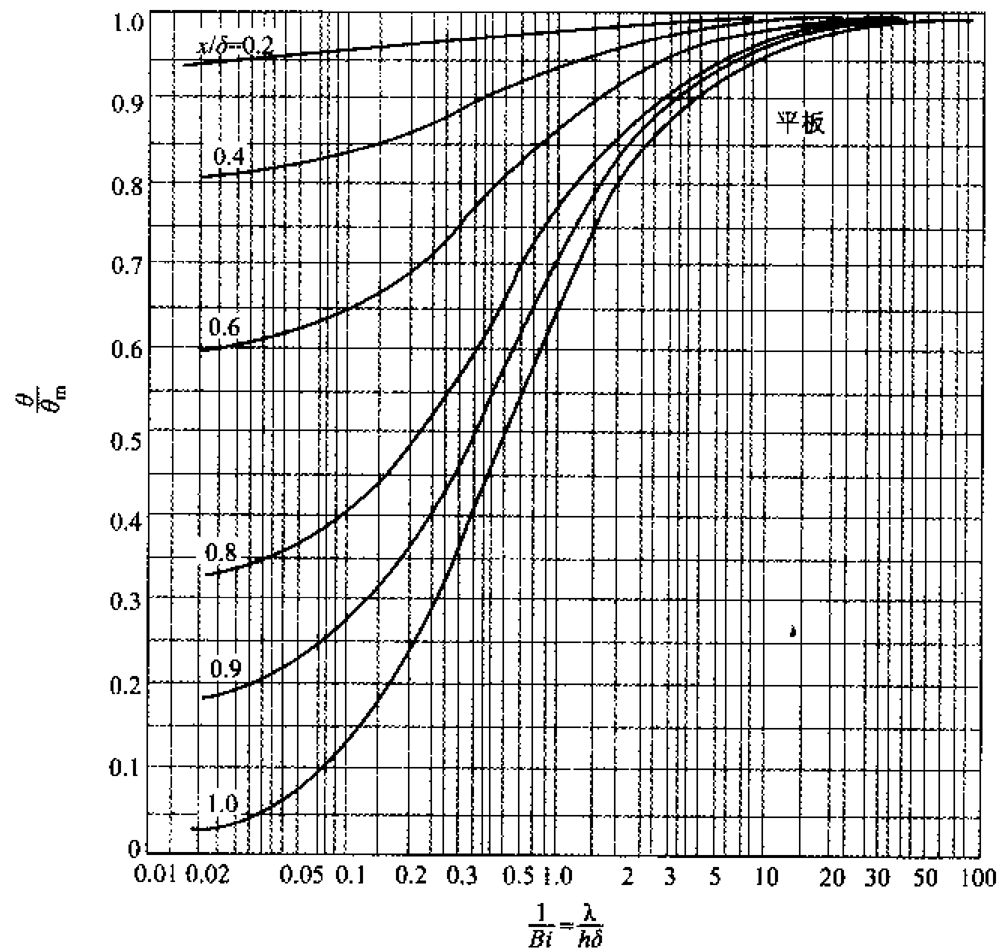


图 4.38　无限大平板的 θ/θ_m 曲线

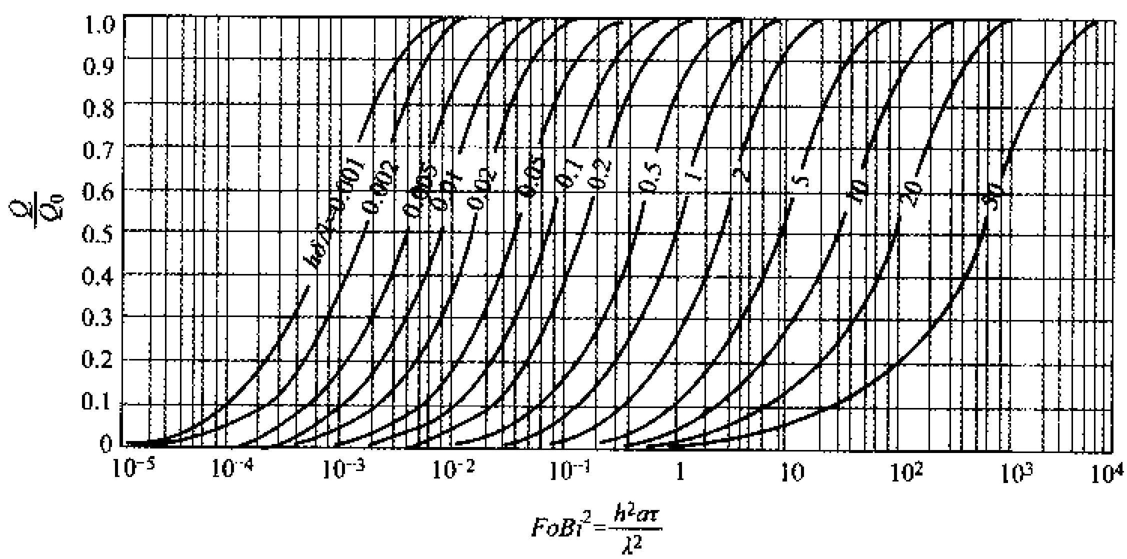


图 4.39　无限大平板(厚 2δ)中累积热量 Q 与时间 τ 的诺谟图

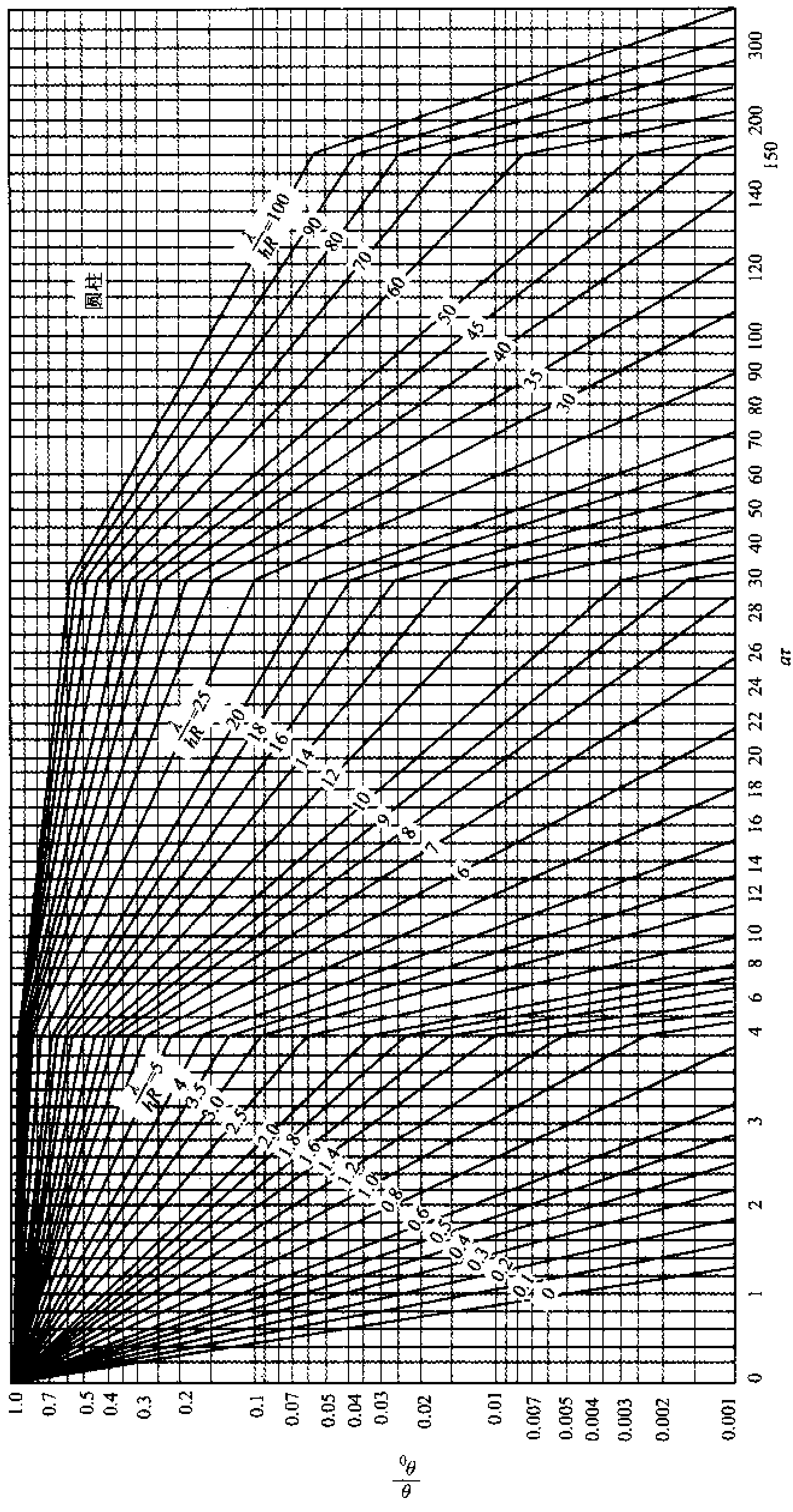


图4.40　无限长圆柱中心温度的诺谟图

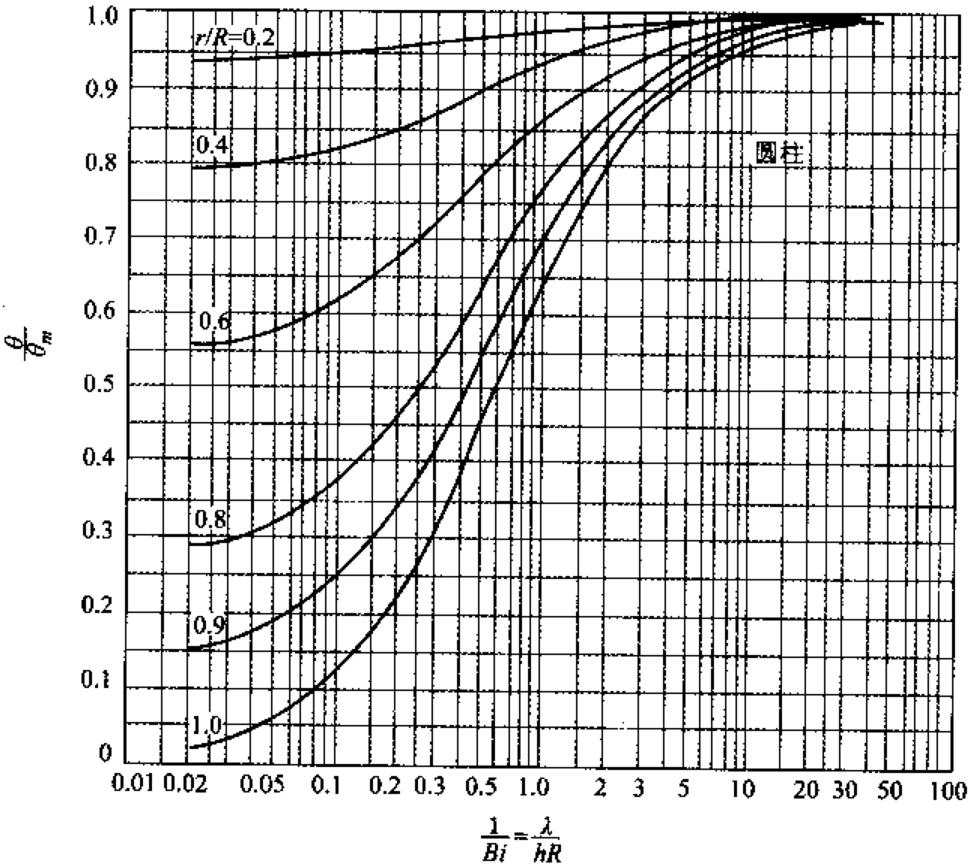


图 4.41 无限长圆柱的 θ/θ_m 曲线

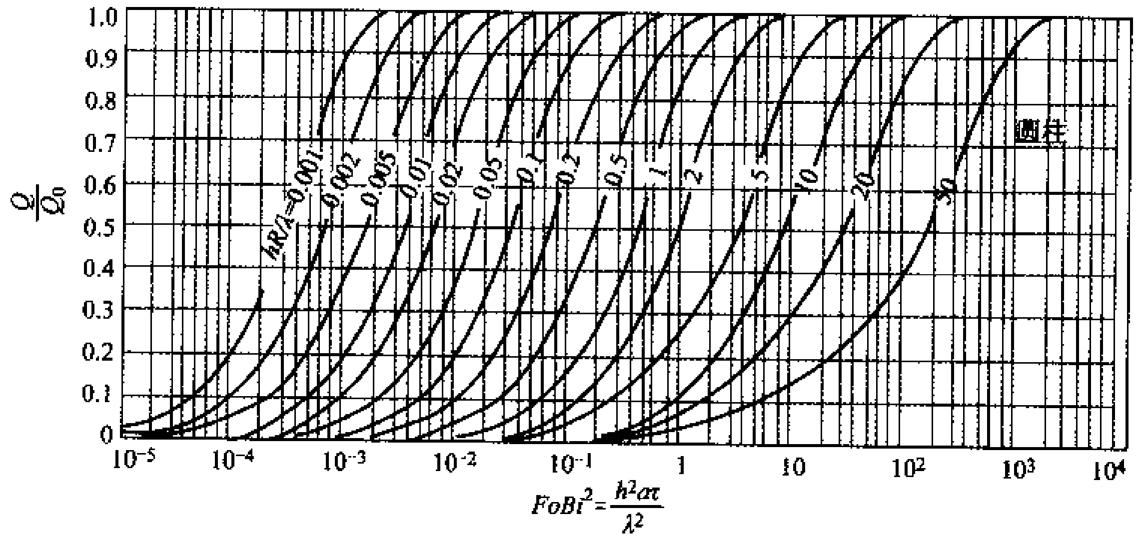


图 4.42 无限长圆柱(半径 R)中累积热量 Q 与时间 τ 的诺谟图

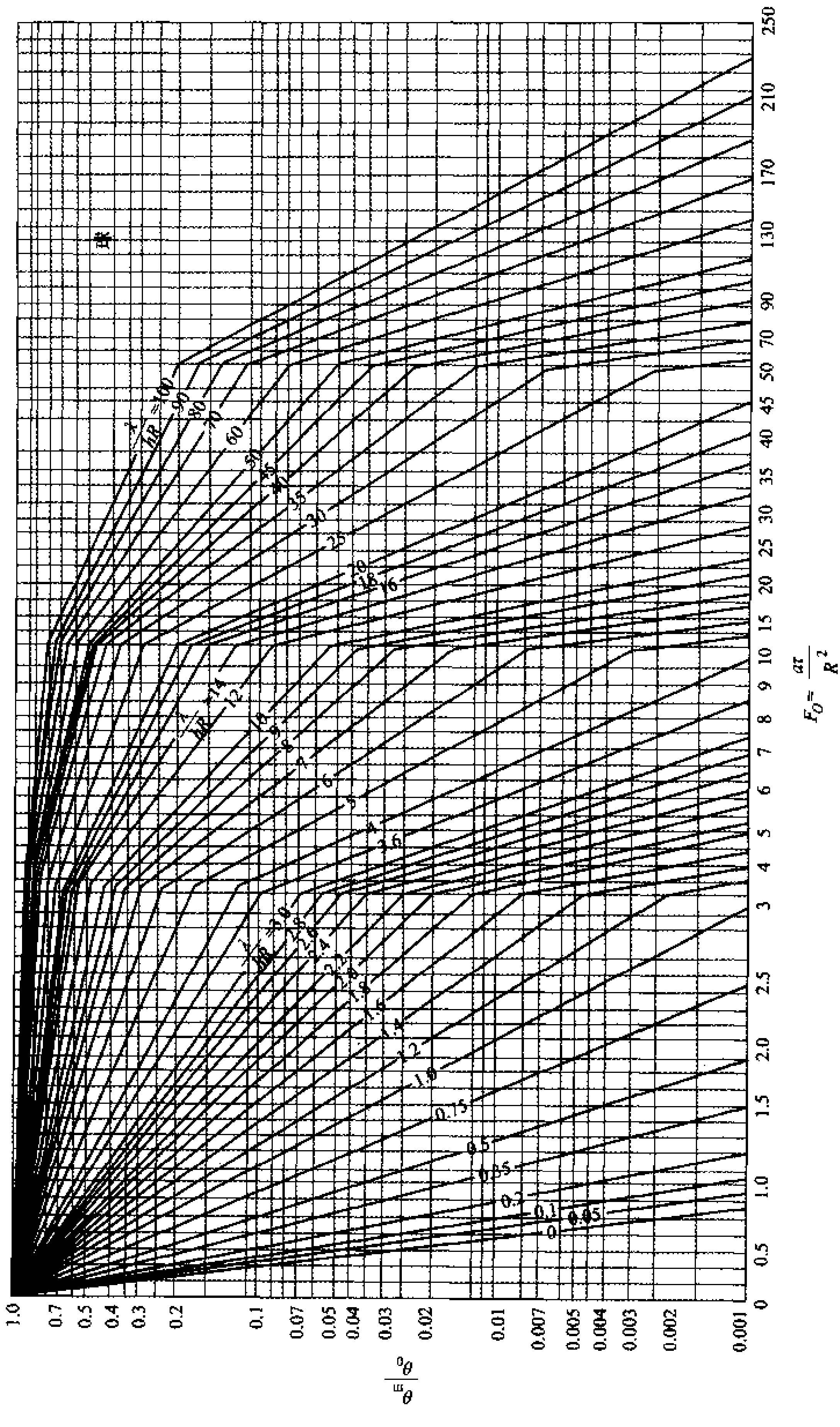


图4.43　球中心温度的诺谟图

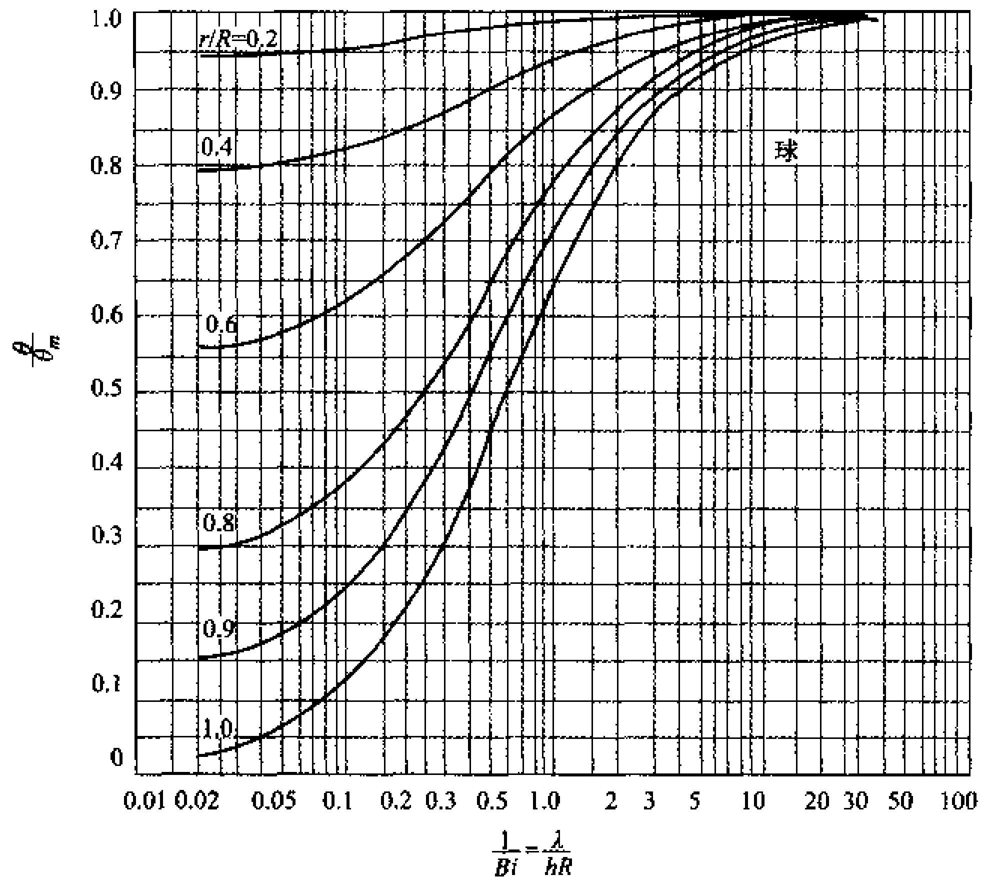


图 4.44 球体的 θ/θ_m 曲线

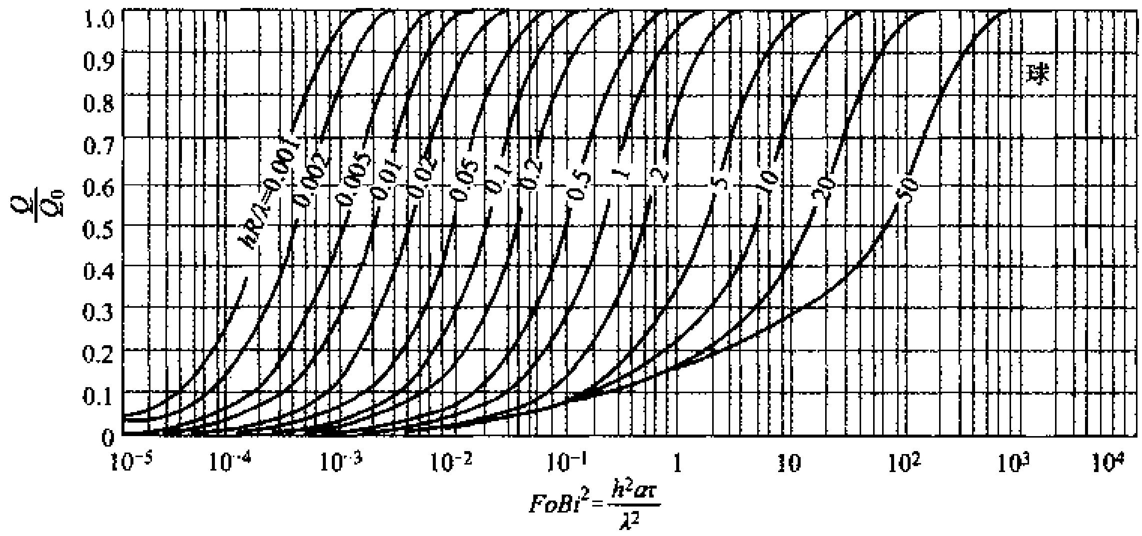


图 4.45 球体中累积热量 Q 与时间 τ 的诺谟图

由于在此问题中，钢板一面为绝热，因此$\frac{x}{\delta}=1.0$，为应用诺谟图，先算出 Bi 数

$$Bi=\frac{h\delta}{\lambda}=\frac{290\times0.3}{34}=2.56$$

查图可得$\frac{\theta_s}{\theta_m}=0.415$。

另一方面，根据已知条件，平板中心的无量纲过余温度$\frac{\theta_m}{\theta_0}$为

$$\frac{\theta_m}{\theta_0}=\frac{\theta_s}{\theta_0}\Big/\frac{\theta_s}{\theta_m}=\frac{0.0127}{0.415}=0.0306$$

查图可得 $Fo=2.8$

因此可求得

$$\tau = Fo\frac{\delta^2}{a} = 2.8\frac{0.3^2}{5.55\times10^{-6}} = 4.54\times10^4\,\text{s} = 12.6\,\text{h}$$

$\theta_m=t_m-t_f=0.0306\times(20-1200)$，$t_m=0.0306\times(-1180)+1200=1164℃$，

$\Delta t=t_s-t_m=1185-1164=21℃$

4.2.2.5　集总参数法

由上面对非稳态导热问题的分析和处理可以看出，由于温度分布与时间有关，所以即使对一维非稳态导热问题的数学分析解的处理也很困难，故必须尽可能对二维或三维问题进行简化处理。本节讨论的集总参数法即为一种将三维非稳态导热问题变为仅与时间有关的非稳态导热问题的处理方法。

实际上，在工程中常常会碰到这种情况，即当固体内部的导热热阻远小于其表面的换热热阻时，固体内部的温度趋于一致，可以认为整个固体在同一瞬间处于同一温度下。这时所要求解的温度仅是时间 τ 的一元函数而与坐标无关，仿佛固体原本连续分布的质量与热容量汇总到一点上而只有一个温度那样。这种忽略物体内部导热热阻的简化分析法称为集总参数法。显然如果物体热导率相当大，或者物体几何尺寸很小，或物体表面传热系数极低，则其非稳态导热问题都可能属于这一类型，可以采用集总参数法来进行处理。

下面根据上述三个具体条件，对导热微分方程式化简，从而求得温度对时间的一维方程的分析解。

设有一任意形状的固体，其体积为 V，表面积为 A，并具有均匀的初始温度 t_0。在初始时刻，突然将它放置于温度恒定为 t_f 的流体中，设 $t_0>t_f$。固体与流体间的表面传热系数 h 及固体的物性参数均保持常数（图 4.46）。设此问题可用集总参数法，试求物体温度随时间的变化关系。

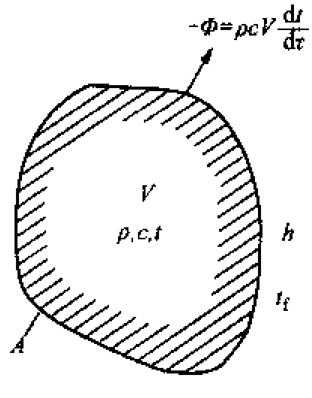


图 4.46　集总参数法的分析对象

非稳态、有内热源的导热微分方程式适用于本问题，即

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\frac{\phi}{\rho c}$$

由于物体的内部热阻可以忽略，温度与坐标无关，所以式中对坐标的导数项均为零。于是上式简化成

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{\phi}{\rho c}$$

其中 ϕ 应看成是广义热源，按照对流换热的牛顿冷却定律

$$-\phi V=hA(t-t_f)$$

因为物体被冷却，$t>t_f$，故 ϕ 应为负值。于是有

$$\rho cV\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=-hA(t-t_f) \tag{4-108}$$

这就是适用于上述问题的导热微分方程式。引入过余温度 $\theta=t-t_f$，上式可改写成

$$\rho cV\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=-hA\theta \tag{4-109}$$

初始条件为 $\tau=0$ 时，$\theta_0=t_0-t_f$。

对式(4-109)采用分离变量法求解。可得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta}=-\frac{hA}{\rho cV}\mathrm{d}\tau \tag{4-110}$$

取 τ 从 0 到 τ 的积分，有

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta}=-\frac{hA}{\rho cV}\int_0^{\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$\ln\frac{\theta}{\theta_0}=-\frac{hA}{\rho Vc}\tau \tag{4-111}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_f}{t_0-t_f}=\exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right) \tag{4-112}$$

式中右端的指数可以表示成准则形式

$$\frac{hA}{\rho cV}\tau=\frac{hA}{\lambda A}\frac{\lambda A^2}{\rho cV^2}\tau=\frac{h(V/A)}{\lambda}\frac{a\tau}{(V/A)^2}=Bi_vFo_v \tag{4-113}$$

式中，(V/A)具有长度的量纲，记为 L；hL/λ 为毕渥准则，记为 Bi_v；$a\tau/L^2$ 为傅里叶准则，记为 Fo_v。这里下标 v 用来表示准则中的特性尺度为 V/A。这样，用准则形式表示，式(4-112)可表示为

$$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_f}{t_0-t_f}=\exp(-Bi_vFo_v) \tag{4-114}$$

式(4-114)或式(4-112)表明，当采用集总参数法分析时，物体中的过余温度随时间成指数曲线关系变化。在过程的开始阶段，温度变化很快，随后逐渐减慢，如图 4.47 所示。两式中 e 的指数中的 $hA/(\rho cV)$具有 $1/\tau$ 的量纲。若令，$\tau=\rho cV(hA)$则有

$$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_f}{t_0-t_f}=\exp(-1)=36.8\%$$

$\rho cV/(hA)$称为时间常数，记为 τ_c。当时间 τ 达到时间常数值时，物体的过余温度已经达到初始过余温度的 36.8%。所以时间常数可以看作是物体对流体温度变动响应快慢的指标。从物理意义上说，物体对流体温度变化响应的快慢取决于其自身的热容量(ρcV)及表面传热条件(hA)两个方面。时间常数反映物体自身的热容量与表面传热条件的综合效应。热容量越大，表面传热条件越差，时间常数越大，表明该物体对温度变动的响应越慢。

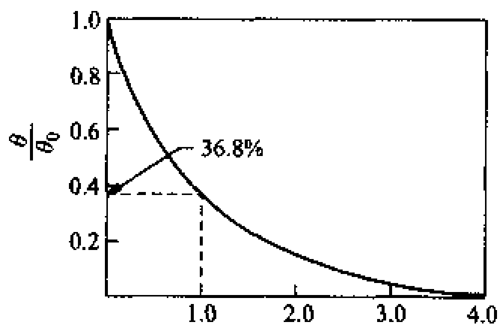


图 4.47　集总参数法分析过余温度的变化曲线

从式(4-114)还可以推导出瞬时热流量 $\phi(\tau)$

$$\phi(\tau)=hA(t(\tau)-t_f)=hA\theta=hA\theta_0\exp\left(-\frac{hA}{\rho Vc}\tau\right) \tag{4-115}$$

令 ϕ_τ 为[0,τ]时刻传递的热量，对 $\phi(\tau)$ 积分可得

$$\phi_\tau = \int_0^\tau \phi(\tau)\mathrm{d}\tau = \rho c V_{\theta 0}\left[1-\exp\left(-\frac{hA}{\rho V c}\right)\tau\right] \tag{4-116}$$

一般来说，集总参数法适用于物体内部导热热阻远远小于表面对流换热热阻，即 $Bi \ll 1$ 的场合。对于形如平板、柱体和球这一类的物体，如果 Bi 数满足下列条件：

$$Bi_v = \frac{h(V/A)}{\lambda} < 0.1M \tag{4-117}$$

则物体中各点过余温度的差别小于5%，式中 M 是与物体几何形状有关的量纲数为1的量。对于无限大平板 $M=1$；对于无限长圆柱 $M=1/2$；球体 $M=1/3$。一般以式(4-117)作为容许采用集总参数法的判据。还应指出，Bi_v 数所用的特性尺度为 V/A，对于不同几何形状物体的特性尺度分别为

厚度为 2δ 的平板　　$\frac{V}{A}=\frac{A\delta}{A}=\delta$

半径为 R 的圆柱　　$\frac{V}{A}=\frac{\pi R^2 l}{2\pi R l}=\frac{R}{2}$

半径为 R 的球体　　$\frac{V}{A}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2}=\frac{R}{3}$

由此可见：平板的 $Bi_v=Bi$，圆柱的 $Bi_v=Bi/2$，球体的 $Bi_v=Bi/3$。这就是式(4-117)中引入 M 因子的原因。

例 4-9　集总参数法的应用

已知：一个直径为5cm、初始温度为450℃的小钢球，其质量定压热容 $c=0.46\text{kJ/(kg·℃)}$，热导率 $\lambda=35\text{W/(m·℃)}$，突然将其放入温度恒为100℃、对流传热系数为 $h=10\text{W/(m}^2\text{·K)}$ 的环境中。试计算小钢球温度达到150℃所需的时间。

解：从已知条件分析可知，对流传热系数 h 很小，热导率 λ 较大，故对该问题首先进行能否利用集总参数法的判据检查：

$$\frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{(10)[(4/3)\pi(0.025)^2]}{4\pi(0.025)^2(35)} = 0.0023 < 0.1$$

因此，可以用集总参数法来求解。有

$$T=150℃ \qquad \rho=7\,800\text{kg/m}^3$$

$$T_\infty=100℃ \qquad h=10\text{W/(m}^2\cdot\text{K)}$$

$$T_0=450℃ \qquad c=0.46\text{kJ/(kg}\cdot℃)$$

$$\frac{hA}{\rho c V} = \frac{(10)4\pi(0.025)^2}{(7\,800)(460)(4\pi/3)(0.025)^2} = 3.44\times10^{-4}\text{s}^{-1}$$

$$\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty} = \mathrm{e}^{-[hA/\rho c V]\tau}$$

$$\frac{150-100}{450-100} = \mathrm{e}^{-3.344\times10^{-4}}$$

$$\tau=5\,819\text{s}=1.62\text{h}$$

4.2.2.6 二维及三维非稳态导热问题的求解简介

实际上往往会遇到不少二维和三维的非稳态导热问题，比如有限长度的圆柱体、平行六面体等等。这些物体可以看成是由平板与圆柱体垂直相交构成，或由几块平板垂直相交构成。对于第三类边界条件和 t_w＝常数的第一类边界条件的导热，已经在数学上证明：多维问题的解等于各个坐标上一维解叠乘的乘积。即当解以过余温度准则的形式表达时，多维问题的解等于各坐标一维解的乘积，如图 4.48 所示。以中心过余温度准则为例：

二维 $$\frac{\theta_m}{\theta_0}=\left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_x\left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_y$$

三维 $$\frac{\theta_m}{\theta_0}=\left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_x\left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_y\left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_z$$

式中，下标 x,y,z 表示不同坐标。这样使得无限大平壁和无限长圆柱体的解推广应用于二维和三维物体，具有很大的实用意义。

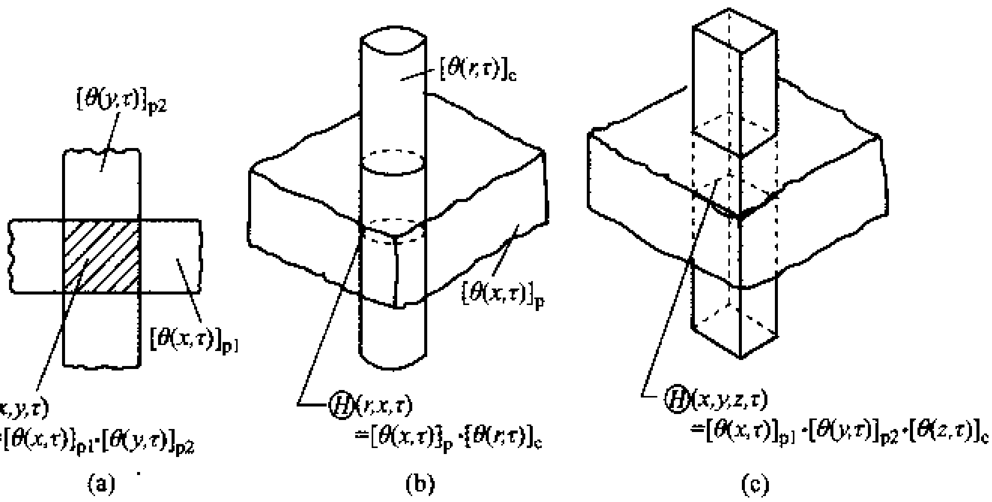


图 4.48 用一维问题的解获得二维、三维问题解的图示

例 4-10 多维非稳态导热

已知：一块牛肉，其尺寸为 40mm×60mm×100mm，初始温度为 5℃，牛肉的物性可按水处理，t_∞＝180℃，对流传热系数为 $h=20\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$。试计算将牛肉加热到 85℃所需要的时间。

解：这是三块平板相交的问题，要计算中心温度达到 85℃所需的时间。牛肉按 $\frac{5+85}{2}=$ 45℃计算，查得物性：$\lambda=64.15\text{W}/(\text{m}\cdot\text{℃})$，$a=15.5\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$

$$\begin{cases} Bi_x=\dfrac{h\delta_x}{\lambda}=\dfrac{20\times0.02}{0.6415}=0.62354 \\ Bi_y=\dfrac{h\delta_y}{\lambda}=\dfrac{20\times0.03}{0.6415}=0.93531 \\ Bi_z=\dfrac{h\delta_z}{\lambda}=\dfrac{20\times0.05}{0.6415}=1.5588 \end{cases}$$

由已知条件，可知

$$\theta_0 = 180-5 = 175℃$$

$$\theta = 180-85 = 95℃$$

因此 $\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{95}{175}=0.542\,857$，$\frac{\theta_m}{\theta_0}=Ae^{-\mu_1^2 Fo}$

对平板 x（轴向），$\mu_1^2=\left(0.402\,2+\frac{0.918\,8}{Bi_x}\right)^{-1}=\left(0.402\,2+\frac{0.918\,8}{0.623\,54}\right)^{-1}=0.533\,13$，

$$A_1=a+b(1-e^{cBi_p})=1.010\,1+0.257\,5(1-e^{-0.4271\times0.62354}=1.070\,304$$

对平板 y，$\mu_2^2=\left(0.402\,2+\frac{0.918\,8}{Bi_y}\right)^{-1}=\left(0.402\,2+\frac{0.918\,8}{0.935\,31}\right)^{-1}=0.722\,26$

$$A_2=a+b(1-e^{cBi_p})=1.010\,1+0.257\,5(1-e^{-0.4271\times0.93531})=1.094\,90$$

对平板 z，$\mu_3^2=\left(0.402\,2+\frac{0.918\,8}{Bi_z}\right)^{-1}=\left(0.402\,2+\frac{0.918\,8}{1.558\,8}\right)^{-1}=1.008\,44$

$$A_3=a+b(1-e^{cBi_p})=1.010\,1+0.257\,5(1-e^{-0.4271\times1.5588})=1.135\,28$$

$$Fo_x=\frac{a\tau}{\delta x^2},\ Fo_y=\frac{a\tau}{\delta y^2},Fo_z=\frac{a\tau}{\delta z^2},\ Fo_y=0.444\,4F0_x,\ Fo_z=0.16Fo_x$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\theta_m}{\theta_0}&=\left[\frac{\theta_m}{\theta_0}\right]_x\left[\frac{\theta_m}{\theta_0}\right]_y\left[\frac{\theta_m}{\theta_0}\right]_z\\&=1.070\,304\times1.094\,90\times1.135\,28\times e^{-(0.53313+0.4444\times0.72226+0.16\times1.00844)Fo_x}\\&=0.542\,9\end{aligned}$$

可知

$$e^{-1.01545Fo_x}=0.408\,07$$

$$Fo_x=0.883$$

$$\tau=\frac{0.883\times0.000\,4}{15.5\times10^{-8}}=2\,279s=38min$$

4.2.2.7 不同形状物体加热或冷却速度的比较

比较不同形状物体加热或冷却的速度，可以通过分别分析内热阻可以忽略（即 $Bi\to0$）及外热阻可以忽略（即 $Bi\gg1$）的两种极限情况来获得定性的结果。

当内热阻可以忽略时，加热或冷却到一定温度所需时间 τ 为

$$\tau=\frac{-\ln(\theta/\theta_0)}{hA}c\rho V \tag{4-118}$$

式中，A 为参与传热的面积，ρV 为物体的质量。$\rho V/A$ 为质量与面积之比。显然，这个比值越大，加热或冷却到一定温度所需要的时间越长。比较同一种材料的加热和冷却速度时，V/A 值越大，则加热或冷却时间越长。根据上节所述，无限大平板（厚度为 2δ）、无限长圆柱 R、球体 R 的同一种材的 V/A 值分别为 δ，$R/2$ 和 $R/3$，故若 $\delta=R$ 的条件下，加热或冷却到指定温度所需的时间，以球体所需时间最短，圆柱次之，而平板最长。

当外热阻可以忽略时，不同几何形状物体中心温度随时间变化的理论解如图 4.49 所示。该图表明，在所比较的六种几何形状物体中，球体加热或冷却速度最快，无限大平板最慢。

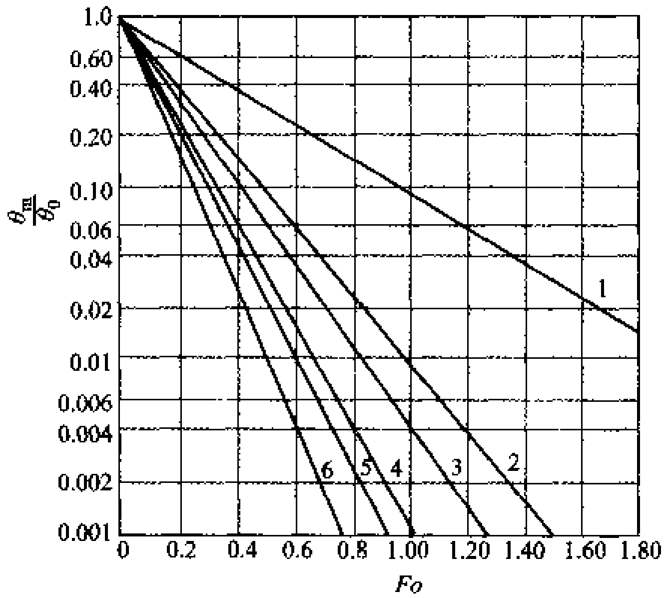


图 4.49 $Bi \gg 1$ 时不同几何形状物体中心温度的变化曲线

1-无限大平板;2-正方形截面的无限长柱体;3-无限长圆柱体;4-立方体;5-长度等于直径的柱体;6-球

4.2.2.8 集中热源作用下的非稳态导热问题简介

焊接、激光加热等技术都属于集中热源作用下的非稳态导热问题。瞬时集中热源作用下的温度场的计算是这类导热问题分析的基础。

1. 点状热源作用于无限大平板上

瞬时集中热源作用下无限大平板温度场的计算

$$\theta = \frac{Q}{c\rho(4\pi a\tau)^{3/2}}\exp(-r^2/4a\tau) \tag{4-119}$$

式中,Q 为瞬时热源强度,单位为 J;r 为距离点热源的坐标距离,单位为 m;ρ 为物体密度,kg/m^3;τ 为时间,s;c 为物体的比热容,J/(kg·K);a 物体的热扩散率,m^2/s。

2. 对半无限大平板的修正计算公式

对于低碳钢(厚度大于 25mm,不锈钢厚度大于 20mm)的厚大平板,在手工电弧焊条件下,对半无限大平板的修正计算公式为

$$\theta = \frac{2Q}{c\rho(4\pi a\tau)^{3/2}}\exp(-r^2/4a\tau) \tag{4-120}$$

3. 对于移动热源

采用坐标转换的方法解决问题。观察者随热源移动,所观察到的只能是准稳态的导热现象。

4. 对于多个热源

对于若干个不相干的热源同时作用或先后作用时,物体上某点的温度等于各独立热源对该点产生温度的叠加总和。即 $t = \sum_{i=1}^{n} t(r_i, \tau_i)$ (4-121)

式(4-121)称为叠加原理,利用该原理,瞬时热源的导热公式可推广应用到连续热源及移动热源的导热计算中。

习 题

1. 有一厚为2cm的墙壁，其材料平均热导率为1.3 W/(m·℃)。为使每平方米的热量损失不超过1 830 W，需对其加盖隔热层，隔热材料的平均热导率为0.35 W/(m·℃)。设加隔热层后墙壁内外温度分别为1 300和30℃，试计算所需的隔热层厚度。

2. 有一复合墙壁，它由2.5cm的铜板，3.2mm的石棉层和5cm的玻璃纤维层组成。墙壁两侧温差为560℃，试计算通过该复合墙壁单位面积的热流量。

3. 厚5cm的铜板一侧温度为250℃，另一侧覆盖了2.5cm厚的玻璃纤维层。玻璃纤维层外侧温度为35℃，通过该复合壁的总热流量为52 kW，试求该壁的面积是多少？

4. 有一平板，其材料的热导率与温度的关系可表示为$k=k_0(1+\beta T^2)$。试推导该壁面导面积热流量的表达式。

5. 一热导率为$k=46$ W/(m·℃)的钢管，内径为3.0cm，管壁厚2mm。一种流体流过管内，使管内侧对流传热系数为1 500 W/(m^2·℃)，而另一种流体横向冲刷圆管外侧，使外侧对流传热系数为197 W/(m^2·℃)。管内流体温度为223℃，管外流体温度为57℃。试计算该圆管每米管长的热损失。

6. 某材料厚30cm，热导率为0.04 W/(m·℃)。在一特定时刻，在x方向的温度分布为$T=150x^2-30x$，式中x的单位为m，以左侧为起点。试计算在$x=0$和$x=30$cm处的热流密度。并判断该材料是被加热还是冷却？

7. 一个冰柜由聚苯乙烯泡沫塑料(热导率为$k=0.033$ W/(m·℃))组成，内部尺寸为25×40×100(cm)，壁厚5.0cm。外侧暴露在25℃的空气中，对流传热系数$h=10$ W/(m^2·℃)。如果柜中装满冰，试计算冰完全融化所需要的时间。冰的融化潜热为330 kJ/kg.

8. 有一蒸汽管道，内壁温度为250℃，内径为8cm，管壁厚5.5mm。管外分别覆盖9cm厚，热导率为$k=0.5$ W/(m·℃)的保温层a和4cm厚，热导率为$k=0.25$ W/(m·℃)的保温层b。最外侧保温层外壁温度20℃。试计算每米管长的热损失。设管材热导率$k=47$ W/(m·℃)。

9. 某平壁，内部热源分布可表示为

$$\dot{q}=\dot{q}_w[1+\beta(T-T_w)]$$

式中，$\dot{q}_w$是一常量，表示在壁温T_w时单位体积的生成热。平壁两侧温度均维持在T_w，壁厚为$2L$。试推导该平壁的温度分布表达式。

10. 有一平板，温度分布为

$$\frac{T-T_1}{T_2-T_1}=C_1+C_2x^2+C_3x^3$$

式中T_1和T_2为平板两侧的温度。如果平板热导率是常数，板厚为L，试推导平板内单位体积生成热随x变化的表达式。起点处壁面温度为$T=T_1$。设在$x=0$处热源为$\dot{q}_0$。

11. 具有均匀内热源的不锈钢板，热导率$k=20$ W/(m·℃)，板厚1.0cm，内热源强度为500MW/m^3。已知板两侧温度分别维持在100和200℃，试计算平板中心的温度。

12. 一不锈钢金属球，直径为4cm，热导率为$k=16$ W/(m·℃)。周围环境温度20℃，表

面对流传热系数 $h=15\ W/(m^2\cdot ℃)$。球内有均匀内热源，强度为 $1.0\ MW/m^3$。试计算稳定状态下球心的温度。

13. 外径为 2mm 的铜导线，暴露在对流环境中。环境温度 $T_\infty=100℃$，对流传热系数 $h=5\,000\ W/(m^2\cdot ℃)$。欲使导线中心温度为 150℃，导线中必须通过多大的电流？如果换成同样粗的铝导线呢？铜的电阻率为 $1.67\mu\Omega.cm$。

14 有一长为 L 的细棒，两端与两壁面连接。两壁面温度分别维持在 T_1 和 T_2。细棒通过对流向周围环境散热，环境温度为 T_∞。

试推导(1)细棒中温度分布的表达式；

(2)细棒的总散热量表达式。

15. 有一玻璃棒，直径为 1cm，长 5cm。将其暴露在 20℃的环境中。一端温度维持在 180℃不变。如果对流传热系数为 $20\ W/(m^2\cdot ℃)$，试计算该玻璃棒的散热量。

16. 一 20cm 厚的平板，具有均匀内热源，强度为 $200\ kW/m^3$。两侧环境温度均为 50℃，对流传热系数 $h=400W/(m^2\cdot ℃)$。平板热导率为 $k=20\ W/(m\cdot ℃)$。试计算平板中心的温度。

17. 一水平管道，表面温度 67℃，直径 25cm。将其埋在地下 1.2m 深处，此处土壤热导率 $k=1.8\ W/(m\cdot ℃)$，地表温度 15℃。试计算该管道单位长度的热损失。

18. 两个长柱体完全浸没在热导率为 $1.4\ W/(m\cdot ℃)$的介质中，直径分别是 8.0 和 3.0cm。两柱体中心线距离为 10cm，温度分别维持在 200℃和 35℃，试计算单位长度上的传热量。

19. 直径为 10cm 的球体，温度保持在 30℃，将其埋入地下。中心处埋深为 24cm，土壤热导率为 $1.2\ W/(m\cdot ℃)$，地表温度为 0℃。计算该球体的热损失。

20. 直径为 20cm 的球体完全由玻璃棉毡包裹。球内热源使球外表面温度维持在 170℃，而玻璃棉毡外边缘温度为 20℃，试计算为维持此平衡状态，必须提供的内热源强度是多少？

21. 某地区通过地下电缆输送电力。将直径为 8.0cm 的电缆埋入地下 1.3m 深处。已知该电缆电阻为 $1.1\times10^{-4}\Omega/m$，地表温度为 25℃，土壤热导率 $k=1.2\ W/(m\cdot ℃)$，如果电缆表面温度不能超过 110℃，试计算电缆中允许通过的最大电流。

22. 埋在地下的两管道，温度分别维持在 200℃和 100℃。其直径分别为 9cm 和 18cm，中心线相距 40cm，试计算单位管长的传热量。设当地土壤热导率为 $1.1\ W/(m\cdot ℃)$。

23. 将直径为 1.5m 的热球体埋入热导率 $k=1.2\ W/(m\cdot ℃)$的材料中。球体温度保持在 300℃，材料外表面温度为 30℃。球心点埋深 3.75m，试计算该球体的热损失。

24. 两平行管道被埋在地下很深位置，此处热导率 $k=3.5\ W/(m\cdot ℃)$。一个管道的直径为 20cm，管内为 120℃的热流体，另一管道直径为 40cm，管内为 20℃的冷流体。两管道中心线相距 1.0m，管道长度与管径和管间距离相比大得多。试计算两管道单位长度的热流量。

25. 人们通常会忽略土地的导热，不对地下蒸汽管道进行保温。考虑直径为 10cm 的蒸汽管道，埋设深度为 23cm，管内蒸汽温度 150℃。埋管长度为 100m，设土壤热导率为 $1.2\ W/(m\cdot ℃)$，地表温度 15℃，试估算该管道的热损失。

26. 一长柱体，表面温度维持在 135℃，将其埋入热导率为 $15.5\ W/(m\cdot ℃)$的材料中。柱体直径为 3cm，中心线埋设深度 5cm，材料外表面温度 46℃，计算该柱体每米长度的散热量。

27. 将尺寸为 50×100cm 电加热板置于半无限大绝热材料顶部。该材料热导率为

0.74 W/(m·℃)。加热板表面温度均保持在 120℃不变，距离加热板很远处的材料温度为 10℃。试计算加热板向该绝热材料的热流量。

28. 某平板被埋入一较大介质中，平板埋深 2.0m。平板尺寸 20×150cm 温度维持在 50℃。介质表面温度为 10℃，热导率 $k=1.5$ W/(m·℃)。计算该平板的热损失。

29. 直径为 10cm 过热蒸汽管道，温度维持在 200℃。管外是与其同心的方形矿渣棉保温层，截面边长为 20cm。保温层外表面温度 35℃。试计算 20m 的该管道的散热量。设保温层材料的热导率为 50 W/cm·℃。

30. 直径为 15cm 的薄平板，表面温度恒定为 87℃。将其埋入带绝热表面的半无限大介质中，埋设深度为 20cm。该介质热导率为 2.7 W/(m·℃)，距离平板很远的介质温度为 13℃(非绝热表面的温度)。试计算该平板的热损失。

31. 具有内热源的铜棒，表面温度维持在 50℃不变，将其竖直埋入一半无限大介质中。铜棒长 40cm，直径为 2cm。介质的等温表面温度为 20℃，试计算此铜棒的热损失。设介质热导率为 3.5 W/(m·℃)。

32. 初始温度均匀为 T_0 的铜球，浸没在某流体中。流体中有电加热源，使流体温度服从周期性变化关系：

$$T_{\infty}-T_{m}=A\sin\omega\tau$$

式中，T_m＝按时间平均的流体温度

T_{∞}＝温度波动的振幅

ω＝频率

试推导球体温度随时间变化的表达式以及流体和球的对流传热系数。设铜球和流体的温度始终是均匀的，可用集总参数法进行分析。

33. 一无限大平板，厚 2.5cm，初始温度为 150℃。表面温度突然降至 30℃。材料热扩散率为 $1.8\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$。试计算 1min 后平板中心的温度。

34. 初始温度为 T_0 的实心体，突然被置于空气温度为 T_{∞} 的大房间中。对流传热系数记为 h，物体表面可看作黑体。设物体温度始终均匀一致，试写出物体温度随时间变化的微分方程。考虑辐射和对流传热。

35. 长宽均为 20cm，厚 5cm 的铜板，初始温度均匀为 200℃。其表面温度突然降至 35℃。运用热阻概念和集总参数法，求得板中心变为 90℃所需要的时间。$\rho=8\,900\text{kg/m}^3$，$c_p=0.38$ kJ/(kg·℃)，$k=370$ W/(m·℃)。

36. 重 6kg 的铝块，初始温度为 300℃。将其突然浸没在 20℃的流体中，对流传热系数为 58 W/(m²·℃)。可将铝块看作同样重量的球体。试用集总参数法估算铝块冷却到 90℃所需要的时间。

37. 一不锈钢金属棒(18%Cr，8%Ni)直径为 6.4mm，初始温度均匀为 25℃。突然将其置于 150℃的流体中，对流传热系数 $h=120$ W/(m²·℃)。用集总参数法计算金属棒温度达到 120℃所需的时间。

38. 直径为 3.0cm 的铜球，初始温度均匀为 50℃。突然将其暴露在 10℃的气流中，对流传热系数 $h=15$ W/(m²·℃)。试计算球体温度降至 25℃需要多长时间？

39. 一直径为 12mm 的铝球体，被加热至 400℃，球体温度均匀。突然将其放置在空气温度为 20℃的房间中，对流传热系数为 10 W/(m²·℃)。试计算球心温度变为 200℃所需的

时间。

40. 某半无限大物体表面温度服从正弦分布，温度分布可表示为：

$$T_{x,\tau}-T_{m}=A\exp\left(-x\sqrt{\frac{\pi n}{a}}\right)\sin\left(2\pi n\tau-x\sqrt{\frac{\pi n}{a}}\right)$$

式中，$T_{x,\tau}$＝表面温度波动开始后 τ 时刻，x 深度的温度

T_{m}＝表面平均温度

n＝波动频率，单位时间的周期数

A＝表面温度波动的振幅

如果将一正弦温度分布加在某大混凝土板表面，温度变化范围为 35～90℃，一个完整周期需要 15min，试求开始温度波动 2h 后，通过表面下 5cm 处的热流量。

41. 运用题 4－9 中的温度分布，证明温度波动的最高点在表面和深度为 x 处滞后为

$$\Delta\tau=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{a\pi n}}$$

42. 炎热的夏天，混凝土路面的温度可能达到 50℃。假设向路面浇水可使路面温度迅速降至 10℃。试问需要多长时间可使路面下 5cm 处温度降至 25℃？

43. 有一水平铜板，厚 10cm，初始温度均匀为 250℃。平板下表面绝热。上表面突然暴露在 80℃的流体中。6min 后，表面温度降至 150℃。试计算满足此过程的对流传热系数。

44. 直径为 11cm 的铝棒，初始温度均匀为 300℃。突然将其置于对流环境中，环境温度 50℃，对流传热系数 h＝1200 W/(m^2·℃)。试问中心温度降至 80℃所需时间以及单位长度上的热损失。

45. 一个男孩把他的玻璃弹球放进 200℃的烤箱中，弹球直径为 20℃。过一会儿，将其拿出，并放在空气温度为 20℃的房间中冷却。对流传热系数大约为 14 W/(m^2·℃)。试计算男孩必须等待多长时间才能使球心温度达到 50℃。

46. 截面为 2.5cm×2.5cm 的钢条，长 7.5cm，初始温度为 250℃。将其浸没在 30℃的油桶中，对流传热系数 570 W/(m^2·℃)。计算 3min 后钢条中心的温度。

第 5 章　对流换热的理论基础及计算

5.1　对流换热

在日常生活和实际工程中，对流换热是普遍发生的热量传递途径之一，夏天天气炎热使用电风扇和空调进行纳凉，就是冷热空气与固体表面进行对流换热的实际过程。使用电风扇来加速空气流动增加人体表面的散热，属于强制对流换热；空调送出的冷空气通过对流降低室内空气温度，达到使人体表面散热的目的，属于自然对流换热。又如冬天在室内使用暖气管道和散热片取暖，热水在管道内流动，通过管道与室内空气进行热量交换，提高室内的温度，从而达到取暖的目的。在工程实践中存在大量的对流换热实例，如换热器管内流动沸腾换热等，都是典型的对流换热热量传递的实例。

前已述及，流体流过固体表面所发生的热量交换称为对流换热。本节将重点讨论和揭示出现在牛顿冷却公式中的表面传热系数的物理意义及影响它的诸有关物理量间的内在联系，介绍如何通过实验和相似理论、量纲分析法建立计算表面传热系数 h 的准则方程式以及它的具体求解方法。在掌握与对流换热理论相关的流体力学基本知识的基础上，掌握对流换热问题的数学描写方法；边界层概念、相似理论和量纲分析。

5.1.1　对流换热基本概念

1. 牛顿冷却公式及影响对流换热的因素

对流换热是指流体流经固体时流体与固体表面之间的热量传递现象(图 5.1)。对流换热的基本计算公式是牛顿冷却公式，即

$$q = h\Delta t \quad (\mathrm{W/m^2}) \tag{5-1}$$

或对于面积为 A 的接触面

$$\Phi = hA\Delta t_m \quad (\mathrm{W}) \tag{5-2}$$

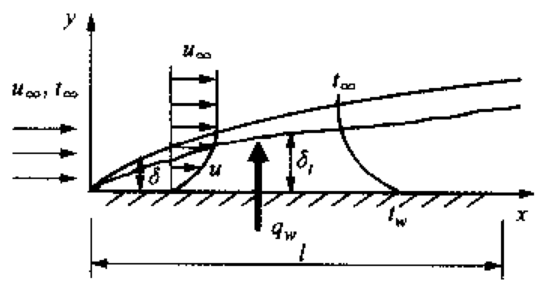


图 5.1　对流换热过程示意图

式中，Δt_m 为传热面积 A 上的平均温差；h 为流体与固体表面间的传热系数。约定 q 和 Φ 总是取正值，因此 Δt 和 Δt_m 也总是取正值。很明显，计算对流换热量的关键在于获得流体与固体表面间的传热系数 h。

然而，牛顿冷却公式只是表面传热系数 h 的一个定义式，它没有揭示出表面传热系数与影响它的有关物理量之间的内在联系。研究对流换热的任务就是要揭示这种内在的联系，确定计算表面传热系数 h 的具体表达式。因此如何确定表面传热系数的大小，是对流换热理论的核心问题。

对流换热是流体的导热和对流两种基本传热方式共同作用的结果。影响对流换热的因素是影响流动的因素和影响流体中热量传递因素的综合作用。主要有以下五个方面。

(1) 流体流动的起因

由于流动起因的不同，对流换热可以分为强制对流换热和自然对流换热两大类(图5.2)。前者是由于泵、风机或其他外部动力造成的，而后者是由于流体内部的密度差引起的。两种流动的成因不同，流体中的速度场有差别，所以换热规律也不一样。

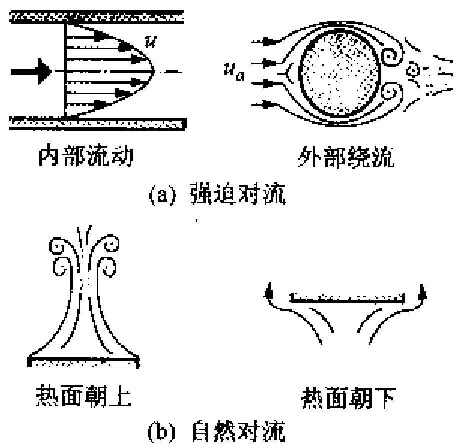


图 5.2　对流换热的分类

(2) 流体有无相变

当流体没有相变时对流换热中的热量交换是由于流体的显热变化而实现的，而在有相变的换热过程中(如沸腾或凝结时)，流体的相变潜热往往起着主要作用，因而换热规律与无相变时不同。

(3) 流体的流动状态(单相流动)

黏性流体存在着两种不同的流态——层流及湍流。层流时流体微团沿着主流方向作有规则的分层流动，而湍流时流体各部分之间发生剧烈的混合，因而在其他条件相同时，两种流态的换热能力不同。

(4) 流体的物理性质

流体的物理性质，如流体密度，动力黏度，热导率等不仅对流体的流动有影响，而且对流体中热量传递也有影响，因此流体的物理性质对于对流换热有着很大的影响。

(5) 换热表面的几何因素

这里的几何因素指的是换热表面的形状、大小、换热表面与流体运动方向的相对位置及换热表面的状态(光滑或粗糙)。不同的流动条件，对换热的影响是不同的，因而换热表面的不同直接影响到换热效果的不同。

需要指出的是，当流动处于多相流动时(气-液、汽-液、汽-固或气-液-固等不同相混合流动)，其换热与单相流动有很大区别，本书不做讨论。有兴趣的读者可参考相关论著。

综合起来可将对流换热按下列情况分类：

- 对流换热
  - 无相变换热
    - 受迫对流换热
      - 内部流动
        - 圆管内受迫流动
        - 非圆形管内受迫流动
      - 外部流动
        - 外掠平板
        - 外掠单管
        - 外掠管束(光管;翅片管)
    - 自然对流换热
      - 无限空间
        - 竖壁;竖管
        - 横管
        - 水平壁(上表面和下表面)
      - 有限空间——夹层空间
    - 混合对流换热(受迫对流与自然对流并存)
  - 相变换热
    - 凝结换热
      - 垂直壁凝结换热
      - 水平单圆管及管束外凝结换热
      - 管内凝结换热
    - 沸腾换热
      - 大空间沸腾换热
      - 管内沸腾换热(横管,竖管)

2. 研究对流换热的方法

迄今为止，研究对流换热，获取表面传热系数表达式的方法，主要有以下四种。

(1) 分析法

对描写某类对流换热问题的偏微分方程及相应的定解条件进行数学求解，从而获得温度场速度场的分析解的方法。

(2) 实验法

在相似原理指导下的实验测定表面传热系数的方法，是目前求解的主要途径，是本章重点。

(3) 比拟法

通过研究动量传递及热量传递的共性或相似特性，以建立起表面传热系数与阻力系数间的相互关系的方法。

(4) 数值解法

通过对控制方程进行离散，然后选择合适的计算方法对流场进行计算，从而获得温度场的分布的方法。

3. 贴壁处的无滑移边界条件与换热微分方程

由于在贴壁处流体受到黏性的作用，没有相对于壁面的流动，因此被称为贴壁处的无滑移边界条件(图5.3)。实验证明，无论对于层流流动或湍流流动，无滑移边界条件都是适用的。因此由无滑移条件可知，在极薄的贴壁流体层中，热量只能以导热方式传递。将傅里叶定律应用于贴壁流体层可得

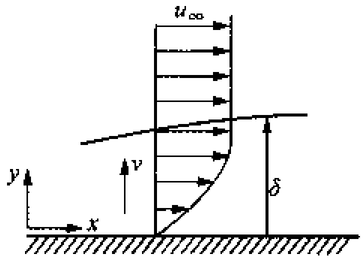


图5.3　壁面附近速度分布示意图

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0} \tag{5-3}$$

式中，$\frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{y=0}$为贴壁处流体的法向温度变化率；$\lambda$为流体的热导率。将牛顿冷却公式$q=h\Delta t$与上式联立求解，可得以下换热微分方程：

$$h = -\frac{\lambda}{\Delta t}\frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0} \tag{5-4}$$

式(5-4)把表面传热系数h与流体温度场联系起来，是对流换热微分方程组的一个组成部分。上式表明，表面传热系数h的求解依赖于流体温度场的求解。但是由于流动的影响因素众多，流体的温度场的求解远远比固体的温度场困难，因此求解流体温度场的过程中需要做较多的假设和简化。

5.1.2　对流换热问题的数学描述

对流换热问题完整的数学描写包括对流换热微分方程组及定解条件，前者包括质量守恒方程(即连续性方程)、动量守恒方程(即N-S方程)及能量守恒方程这三大守恒定律的数学表达式。为了简化分析，对于影响对流换热问题的主要因素，在推导时作下列简化假设：①流体为连续性介质；②流动是二维的；③流体为不可压的牛顿型流体；④流体物性为常数，无内热源；⑤忽略耗散热。除高速的气体流动及一部分化工用流体等情况下的对流换热外，对工程中常见的对流换热问题大都可以作上述假定。为了书写上的简洁，本书采用二维的假设，在实际应用时可把二维推广到三维。

1. 质量守恒方程——连续性微分方程

由流体力学可知，流体在流动过程中遵循质量守恒定律，且不违背连续介质假设，即在单位时间内，净流入微元体的质量等于微元体内的质量增量。对于不可压缩黏性流体在稳态、常物性场合下，流体运动中的质量守恒的数学表达式（即连续性微分方程）为

三维：$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}=0$

二维：$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

2. 动量守恒方程(Navier—Stokes 方程)

在本书的流体力学基础知识一节中，已经依据牛顿第二定律推导出动量微分方程。对于二维不可压缩黏性流体，在稳态、常物性下，根据作用于微元体上所有外力之和等于惯性力（即质量乘以加速度），推导出笛卡儿坐标系下的动量微分方程组为

X 方向：$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

Y 方向：$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$

式中：等式右边第一项为体积力在 XY 方向上的分量；第二项为压力在 XY 方向上的分量；第三项为黏性力在 XY 方向上的分量。

3. 能量微分方程

如图 5.4 所示，笛卡儿坐标系中的微元体作为分析对象。它是空间某位置的一个控制体，在各界面上有流体的进、出，并通过对流和导热传递热量。由热力学第一定律，略去微元体位能和动能的变化，并且不做功，有

$$\Phi=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau}+(q_m)_{out}h_{out}-(q_m)_{in}h_{in} \tag{5-5}$$

式中，q_m 为质量流量；h 为流体的比焓；下标“in”及“out”表示流体进入微元体和从微元体流出；U 为微元体的热力学能；Φ 为未通过界面由外界导入微元体的热流量。

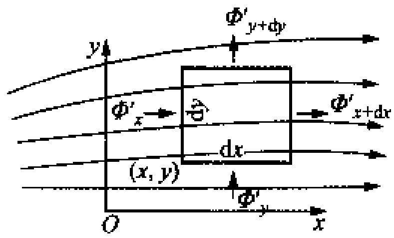


图 5.4 能量微分方程推导中的微元体

在 dτ 时间内，通过导热进入微元体的热量及内能变化为

$$\Phi\mathrm{d}\tau=\lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \tag{5-6}$$

$$\Delta U=\rho c_p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\partial t}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau \tag{5-7}$$

由于流体流出、流进微元体所带入带出的焓差可分别从 x 及 y 方向加以计算。对 x 方向，在 dτ 时间内由 x 处的截面进出微元体的焓分别为

$$H_x=\rho c_p u t\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \tag{5-8}$$

$$H_{x+dx}=\rho c_p\left(t+\frac{\partial t}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \tag{5-9}$$

将两式相减可得 dτ 时间内在 x 方向上由流体净带出微元体的热量为

$$H_{x+dx}-H_x=\rho c_p\left(u\frac{\partial t}{\partial x}+t\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \tag{5-10}$$

同理，y 方向上的相应表达式为

$$H_{y+dy}-H_y=\rho c_p\left(v\frac{\partial t}{\partial y}+t\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdyd\tau \tag{5-11}$$

于是，在单位时间内由于流体的流动而带出微元体的净热量为

$$(q_m)_{out}h_{out}-(q_m)_{in}h_{in}=\rho c_p\left(u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}\right)dxdyd\tau \tag{5-12}$$

最终，得到两维、常物性、无内热源的能量微分方程：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}+u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\lambda}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) \tag{5-13}$$

显然，式(5-13)左边第一项是非稳态项，表示温度随时间的变化率；第二项与第三项称为对流项，表示由于由流动产生的热量传递；方程右边项称为扩散项，表示由于流体导热产生的热量的传递。

在下列情况下，式(5-13)扩展为：①如果流体中有内热源，其强度为 $\dot{\Phi}(x,y)$，只需右端加上$\frac{\dot{\Phi}(x,y)}{\rho c_p}$就得出有内热源时的能量微分方程；②当流体静止，流速 $u=v=0$，方程即为常物性、无内热源的导热微分方程。

至此，我们推导出了二维不可压缩黏性流体在稳态、常物性条件下的质量守恒、动量守恒及能量守恒方程，从而构成了描写对流换热的完整的微分方程组。对于这一封闭方程组(包含五个方程)，共有五个未知数(u, v, w, p, t)。在理论上可对其进行求解。但实际上由于 N-S 方程的复杂性和非线性，针对实际问题的求解非常困难。也正因为此，普朗特提出了著名的边界层理论(1904 年)，对 $N-S$ 方程进行了实质性的简化获得突破，使数学分析解得到很大发展。随后波尔豪森(E. Pohlhausen)在流动边界层概念的启发下，于 1921 年引入热边界层概念，并与施密特(E. schmidt)、贝克曼(W. Beckmann)两位数学家合作，于 1930 年成功地求解了竖壁附近空气的自然对流换热问题。科学研究历史的这段佳话反映了传热学的发展与数学密切相关，也是科学界不同学科成功合作的范例。

5.1.3　对流换热边界层微分方程组

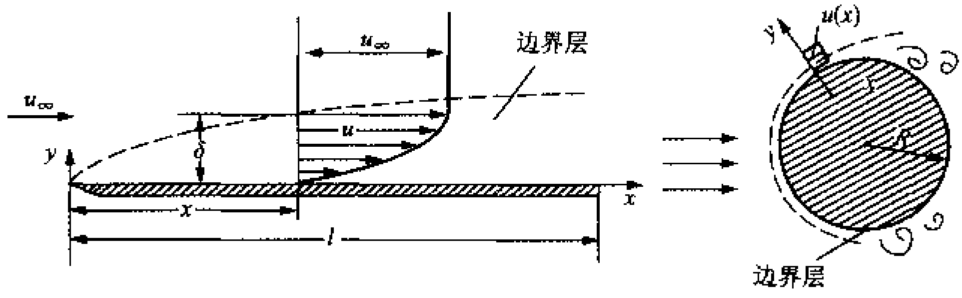
1. 普朗特边界层理论(1904 年，L. Prandtl)简介

(1) 流动边界层(又称速度边界层)

长期以来，由于数学上的困难，只有极少数情况才能获得描述黏性流体流动的纳维-斯托克斯方程的分析解。普朗特在仔细观察了黏性流体流过固体表面的特性后，提出了一个突破性地分析概念，即黏滞性起作用的区域仅仅局限在靠近壁面的薄层内。这种在固体表面附近流体速度发生剧烈变化的薄层被称为流动边界层(又称速度边界层)。如图 5.5 所示，在边界层以外，由于速度梯度很小，可以不考虑黏性带来的切应力，则可将其看作理想流体的无旋流动。这样就可以对边界层外的主流流动的 N－S 方程进行实质性的简化，从而获得一些问题的分析解。

当黏性流体沿固体表面流动时，流场可划分为主流区和边界层区。边界层区域内，流速变化剧烈。主流区域内，速度梯度几乎为零。流动边界层厚度根据所规定的接近主流速度的程度不同而不同，通常规定达到主流速度的 99%处的距离 y 为其厚度，记为 δ。

边界层厚度 δ 与壁面尺寸 l 相比是个很小的量，且远不止小一个数量级。在极薄的边界



(a) (b)

图 5.5 边界层示意图

层内，流体速度从 0m/s 变化到接近主流速度，导致在此方向上速度梯度很大。以温度为 20℃ 的空气沿平板的流动为例，在不同来流速度 u_∞ 下，δ 沿平板长度的变化如图 5.6 所示。由图可知，相对于平板长度 l，δ 是一个比 l 小几个数量级的量。在这样小的薄层内，流体的速度要从 0 m/s 变化到接近于主流速度，所以流体在垂直于主流方向上的速度变化是十分剧烈的。

对于主流区而言，由于几乎不受由黏性产生的剪切力的作用，速度梯度非常小，因此流动可视为理想流体的流动，而在边界层内则应考虑黏性的影响。

在边界层内，流动状态分为层流和湍流(图5.7)。在层流边界层，流体作有秩序的分层流动，各层互不干扰；而在湍流边界层，流体质点在沿 x 方向运动的同时，还作着紊乱的不规则脉动。在湍流边界层内紧靠壁面处仍有极薄层保持层流状态，称之为层流底层。

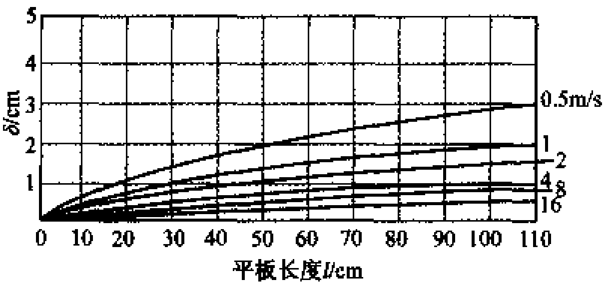


图 5.6 空气沿平板流动时边界层增厚的情况

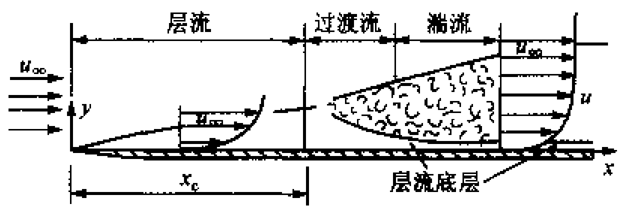


图 5.7 掠过平板时边界层的形成和发展

(2) 温度边界层(热边界层)

实验观察发现，在对流换热条件下，主流与壁面之间存在着温度差。在壁面附近的一个薄层内，流体温度在壁面的法向方向上发生剧烈的变化；而在此薄层之外，流体的温度梯度几乎等于零。因此，可以将边界层概念推广到温度场中。固体表面附近流体温度发生剧烈变化的这一薄层称为温度边界层(热边界层)，其厚度记为 δ_t。对于外掠平板的对流换热，类似于速度边界层的定义，传热学中一般也将达到来流过余温度 99%的流层处，定义为 δ_t 的外边界。除液态金属及高黏性的流体外，热边界层的厚度 δ_t 在数量级上是个与运动边界层厚度 δ 相当的小量。于是对流换热问题的温度场也可区分为两个区域：热边界层区与主流区。在主流区，流体中的温度变化率可视为零，这样就可把要研究的热量传递的区域集中到热边界层之内。图 5.8 示出了固体表面附近速度边界层及温度边界层的大致情况。

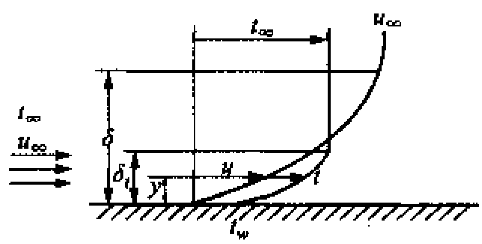


图 5.8 速度边界层与温度边界层

2. 数量级分析方法简介

根据热边界层的上述特点，可以运用数量级分析的方法来简化能量微分方程。

所谓数量级分析，是指通过比较方程式中各项数量级的相对大小，把数量级较大的项保留，而舍去数量级较小的项，实现方程式的合理简化。例如，在速度边界层内，从壁面到 $y=\delta$ 处，主流方向速度 u 的积分平均值显然远远大于垂直主流方向的流速 v 的积分平均绝对值。因而把边界层内 u 的数量级定为1，则 v 的数量级必定是个小量，用符号 δ 表示。采用这样的方法可以对能量守恒方程中的有关量的数量级做出如表5.1所示的分析。至于导数的数量级

表5.1　温度边界层中物理量的数量级

变　量	x（主流方向坐标）	y	u	v	t
数量级	1	δ	1	δ	1

则将因变量及自变量的数量级带人导数的表达式而得出。例如，$\frac{\partial t}{\partial x}$ 的数量级为 $\frac{1}{1}=1$，而 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)$ 的数量级则为 $(1/\delta)/\delta=\frac{1}{\delta^2}$。于是边界层中二维稳态能量方程的数量级分析如下：

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right] \tag{5-14}$$

数量级

$$1\,\frac{1}{1}\qquad \delta\,\frac{1}{\delta}\qquad \left(\frac{1}{1}\right)/1\qquad \left(\frac{1}{\delta}\right)/\delta$$

$$1\qquad 1\qquad 1\qquad \frac{1}{\delta^2}$$

可见：①等号右方括号内的两个项中，由于 $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\ll\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$，因而可以把主流方向的二阶导数项 $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ 略去；②要使等号前后的项有相同的数量级，热扩散率 a 必须具有 δ^2 的数量级。经过简化，可以得到二维、稳态、无内热源的边界层能量方程为

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \tag{5-15}$$

同样，通过在动量方程中略去主流方向上的二阶导数项、略去速度 v 的动量变化，以及认为边界层中 $\frac{\partial p}{\partial y}=0$，可得边界层黏性流体的简化稳态动量方程：

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5-16}$$

至此，可得简化后的两维、稳态、无内热源的边界层换热微分方程组为

连续性方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{5-17}$$

动量守恒方程：

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5-18}$$

能量守恒方程：

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \tag{5-19}$$

注意，式(5-18)中的 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ 是已知量，它可由边界层外理想流体的伯努利方程确定。这样，三个方

程包括三个未知数 u,v,t，可知此方程组封闭，加上定解条件即可求解。

例如对于主流场是均速 u_∞、均温 t_∞，并给定恒壁温，即 $y=0$ 时 $t=t_w$ 的问题，定解条件可表示为

$$y=0:\quad u=0,\quad v=0,\quad t=t_w$$

$$y=\infty:\quad u=u_\infty,\quad t=t_\infty$$

对于平板，分析求解上述方程组（此时 $dp/dx=0$），可得层流局部表面传热系数 h_x 的分析解（波尔豪森解）：

$$h_x = 0.332\frac{\lambda}{x}\left(\frac{u_\infty x}{v}\right)^{1/2}\left(\frac{v}{a}\right)^{1/3} \tag{5-20}$$

近年来，随着计算机技术的飞速发展，微分方程组的求解也获得长足发展，感兴趣的读者可从有关文献中了解对边界层换热微分方程组的求解方法。

5.1.4 相似原理与对流换热问题的无量纲准则方程式的建立

通过实验求取对流换热的实用关联式，仍然是传热学研究中一个重要的手段。然而，对于存在着许多影响因素的复杂物理现象，要找出众多变量间的函数关系，实验次数十分庞大。因此，为了大大减少实验次数，而且又可得出具有一定通用性的结果，必须在相似原理的指导下进行实验。

1. 相似原理简介

相似原理所研究的是相似物理现象之间的关系。相似的概念首先只限于在同类的物理现象之间。所谓同类现象，是指用相同形式并具有相同内容的微分方程式所描写的现象。那么，怎样的同类物理现象是相似的呢？对于同类的物理现象，如果在相应的时刻与相应的地点上与现象有关的物理量一一对应成比例，则称此两现象彼此相似。例如，所谓两个彼此相似的稳态对流换热现象，必须具备几何形状相似、温度场分布相似、速度场分布相似及热物性场相似等。凡是相似的物理现象，其物理量的场一定可以用一个统一的无量纲的场来表示。

判断两个同类现象相似的条件是：第一，同名的已定特征数相等，已定特征数是由所研究问题的已知量组成的特征数；第二，单值性条件相似，包括初始条件、边界条件、几何条件和物理条件。

一个物理现象中的各个物理量不是单独地起作用，而是与其他物理量之间相互影响、相互制约。描写该物理现象的微分方程组及定解条件即给出了这种相互影响、相互制约的基本关系。但是如前所述，微分方程组的求解存在数学上的困难。为了通过实验研究某物理现象各物理量之间相互影响、相互制约的关系，必须首先把物理量无量纲化，通过实验建立无量纲量之间的函数关系式。例如，为了更好地研究对流换热规律，引入无量纲概念。无量纲即通过确定某一特征尺度，把物理量无量纲化。表示物理现象的解的无量纲量之间的函数关系式称为准则数方程（即特征数方程）。获得与所研究现象有关的无量纲量可采用相似分析法和量纲分析法等。

1）相似分析法

相似分析法根据相似现象的基本定义——各个物理量的场对应成比例，对于过程有关的量引入两个现象之间的一系列比例系数（称相似倍数），然后应用描述该过程的一些数学关系式，导出制约这些相似倍数间的关系，从而得出相应的相似准则数。

从流体力学知，若流体的两个运动现象相似，从动量微分方程可导得，

$$\frac{ul}{v}=\frac{u'l'}{v'}$$

即

$$Re'=Re'' \tag{5-21}$$

Re 为表示流动相似的无量纲数，称为雷诺准则数。

根据能量微分方程可推得，如两热量传递现象相似，则有

$$\frac{ul}{a}=\frac{u'l'}{a'} \text{ 即 } Pe'=Pe'' \tag{5-22}$$

Pe 是表示热量传递现象相似的无量纲数，称为贝克来准则数。贝克来数可分解为雷诺数与 v/a 的乘积，即

$$Pe=PrRe=\frac{ul}{a}$$

式中 $Pr=v/a$ 也是一个无量纲数，它完全由流体物性构成。表示动量扩散厚度与热量扩散厚度之比的一种度量，称为普朗特准则数。

图 5.9 表示流体与固体间的对流换热现象，有

$$h'=-\frac{\lambda'}{\Delta t'}\frac{\partial t'}{\partial y'}\bigg|_{y'=0} \tag{5-23}$$

由相似现象定义可导出努塞尔准则数 Nu

$$\frac{h'y'}{\lambda'}=\frac{h''y''}{\lambda''} \text{ 即 } Nu'=Nu'' \tag{5-24}$$

对于自然对流流动，动量微分方程需增加体积力项，即

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g\alpha\theta+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5-25}$$

式中，α 为流体的体胀系数，$\theta=t-t_\infty$ 为过余温度。

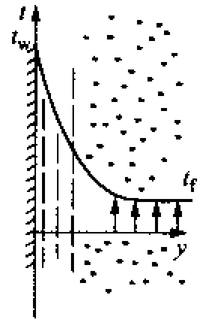


图 5.9　流体中的温度分布

对此式进行相似分析，可得格拉晓夫准则数 Gr

$$Gr=\frac{l^3 g\alpha\Delta t}{v^2} \tag{5-26}$$

式中，$\Delta t=t_w-t_\infty$。

相似原理在对流换热中得到广泛应用，在对流换热的研究中起着重要作用。相似原理可指导试验的安排及试验数据的处理。相似原理阐明了实验结果应整理成准则数间的关系式，但具体的函数形式以及定性温度和特征长度的确定，则带有经验的性质。

相似原理的一个重要应用就是指导模化试验。模化试验是指用不同于实物几何尺寸的模型(一般是缩小的模型)来研究实际装置中所进行的物理过程的试验。要求对过程有决定性影响的条件满足相似原理的要求。一般物性场的相似通过引入定性温度和特性尺度来实现。

2) 量纲分析法

量纲分析是获得无量纲量的又一种方法。它的长处是方法简单，而且在还无法列出微分方程，但却知道影响现象的有关物理量的问题时，也可求出结果。它的缺点是在对有关物理量漏列或错列时不能得出正确的结果。对于传热学中所涉及的对流换热问题，绝大多数情况下都可列出微分方程式，故可较方便地采用量纲分析法来导出无量纲量。

π 定理及量纲分析

量纲间的内在联系，体现在量纲分析的基本依据是 π 定理。

π 定理的内容是：一个表示 n 个物理量间关系的量纲一致的方程式，一定可以转换成包含 $n-r$ 个独立的无量纲物理量群间的关系式。r 指 n 个物理量中所涉及到的基本量纲的数目。

下面以单相介质管内对流换热问题为例，应用量纲分析法来导出无量纲量。

$$h = f(u, d, \lambda, \eta, \rho, c_p) \tag{5-27}$$

应用量纲分析法获得特征数的步骤如下。

(1) 列出各物理量的量纲，选定基本物理量

本例 7 个物理量的量纲，包括 4 个基本量时间 T、长度 L、质量 M、温度 Θ 的量纲组成，即 $n=7, r=4$，故可组成三个无量纲量。同时选定的基本物理量的量纲必须包括上述 4 个基本量的量纲。这里选用 u, d, λ 及 η 为基本物理量。

(2) 将基本量逐一与其余各量组成无量纲量。无量纲量采用幂指数形式表示，其中指数值待定。用字母 π 表示无量纲量，对本例有

$$\pi_1 = h u^{a_1} d^{b_1} \lambda^{c_1} \eta^{d_1}$$

$$\pi_2 = \rho u^{a_2} d^{b_2} \lambda^{c_2} \eta^{d_2}$$

$$\pi_3 = c_p u^{a_3} d^{b_3} \lambda^{c_3} \eta^{d_3}$$

(3) 应用量纲和谐原理来决定待定指数

以 π_1 为例可列出各物理量的量纲如下：

$$\dim\lambda = ML\Theta^{-1}T^{-3}; \dim d = L$$

$$\dim h = M\Theta^{-1}T^{-3}; \ \dim\eta = ML^{-1}T^{-1}$$

$$\dim u = LT^{-1}$$

由此，可得

$$\pi_1 = L^{a_1+b_1+c_1-d_1} M^{c_1+d_1+1} \Theta^{-1-c_1} T^{-a_1-d_1-3c_1-3}$$

根据量纲和谐原理，上式等号左边为无量纲量，因而等号右边各量纲的指数必定为零，故得

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 - d_1 = 0 \\ c_1 + d_1 + 1 = 0 \\ -1 - c_1 = 0 \\ -a_1 - d_1 - 3c_1 - 3 = 0 \end{cases}$$

由此得

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 1 \\ c_1 = -1 \\ d_1 = 0 \end{cases}$$

故有

$$\pi_1 = h u^0 d^1 \lambda^{-1} \eta^0 = \frac{hd}{\lambda} = Nu$$

类似地可得

$$\pi_2 = \frac{\rho u d}{\eta} = Re$$

$$\pi_3 = \frac{\eta c_p}{\lambda} = Pr$$

π_1 及 π_2 分别是以管子内径为特征长度的努塞尔数及雷诺数。至此，原关系式可转化为

$$Nu = f(Re, Pr) \tag{5-28}$$

我们已经讨论过的在对流换热中常用的准则数及其物理意义归纳如下：

$Re(\frac{ul}{v})$—雷诺数，惯性力与黏性力之比的一种量度。

$Nu(\frac{al}{\lambda})$—努塞尔数，壁面上流体的无量纲温度梯度(流体的热导率)。

$Pr(\frac{v}{a})$—普朗特数，动量扩散厚度与热量扩散厚度之比的一种量度。

$Gr(\frac{gl^3}{v^2}\beta\Delta t)$—格拉晓夫数，浮升力与黏性力之比的一种量度。

$Bi(\frac{al}{\lambda})$—毕渥数，固体内部导热热阻与其界面上换热热阻之比。

$Fo(\frac{a\tau}{l^2})$—傅里叶数，非稳态过程的无量纲时间，表征过程进行的深度。

$Pe(\frac{ul}{a})$—贝克来数。

2. 自然对流换热准则关系式的建立

自然对流换热的准则关系式与强制对流换热的差别在于动量微分方程中浮升力项不能被忽略。从对流换热微分方程组出发，可得到自然对流换热的准则方程式。

首先对二维动量方程进行简化：在 x 方向上，$F_x=-\rho g$，略去主流方向上的二阶导数，有：

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5-29}$$

由于在薄层外，$u=v=0$，可推得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-\rho_\infty g \tag{5-30}$$

引入体胀系数 α

$$\alpha=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\approx-\frac{1}{\rho}\frac{\rho_\infty-\rho}{T_\infty-T} \tag{5-31}$$

代入动量方程并令 $\theta=T-T_\infty$，改写原方程为

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g\alpha\theta+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5-32}$$

采用相似分析方法，以 u_0，l 及 $\Delta t=t_w-t_\infty$ 分别作为流速、长度及过余温度的标尺，得

$$\frac{u_0^2}{l}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)=g\alpha\Delta t\Theta^*+\frac{vu_0}{l^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \tag{5-33}$$

式中，带上角“*”的量为无量纲量。$\Theta^*=(t-t_\infty)/(t_w-t_\infty)$。

进一步化简可得

$$\frac{u_0 l}{v}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)=\frac{g\alpha\Delta t l^2}{vu_0}\Theta^*+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \tag{5-34}$$

式中，第一个组合量 $u_0 l/v$ 是雷诺数，第二个组合量经改写后，与雷诺数相乘并消去 u_0 可得无量纲量：

$$Gr=\frac{g\alpha\Delta t l^2}{vu_0}\frac{u_0 l}{v}=\frac{g\alpha\Delta t l^3}{v^2} \tag{5-35}$$

Gr 即为格拉晓夫数。在物理上，Gr 数是浮升力/黏滞力比值的一种量度。Gr 数的增大表明浮升力作用的相对增大。

分析上述微分方程，还可以得出影响自然对流的其他无量纲数，即 Re, Pr 和 Nu 等。但由于 $Re = f(Gr)$，不是独立的准则数，故自然对流换热的准则方程式应表示为包含未知换热系数 h 的准则数 Nu 与已知准则数 Pr，Gr 间的关系式，即

$$Nu = f(Gr, Pr) \tag{5-36}$$

不同流动形式的自然对流换热规律不同，最新研究结果表明，对于自然对流换热决定其流动形态转变的判据是 Gr 准则。在下一节中将会讨论这个问题。

使用准则方程式时应注意：第一，特征长度按该准则式规定的方式选取。如管内流（内径）和管外流（外径）等等；第二，定性温度应按该准则式规定的方式选取。如内部流与外部流。第三，准则方程不能任意推广到该方程的实验参数的范围之外。如 Re 数范围、Pr 数范围、几何参数范围等。

5.2 对流换热问题的计算

在上一节中介绍的对流换热的基本概念和基本理论的基础上，本节将详细讨论研究自然对流换热与强制对流换热准则方程式的建立与求解。

5.2.1 自然对流换热及实验关联式

不依靠泵或风机等外力推动，由流体自身温度场的不均匀所引起的流动称为自然对流。例如，暖气管道的散热以及不用风扇强制冷却的电器元件的散热等都是自然对流换热的应用实例。不均匀的温度场造成不均匀密度场，由此产生浮升力成为运动的动力。一般情况下，不均匀温度场仅发生在靠近换热壁面的薄层之内。图 5.10 表示出的是一块竖的热壁面近旁薄层内温度和速度的变化图像。很明显，其温度单调下降，而速度分布具有两头小中间大的形式。因为，在贴壁处流体速度必等于零，而在薄层外端已无温压存在，所以当浮升力小时速度也等于零；在这两者之间速度具有一个峰值。换热越强薄层内的温度变化越大，流体的自然对流也越强烈。

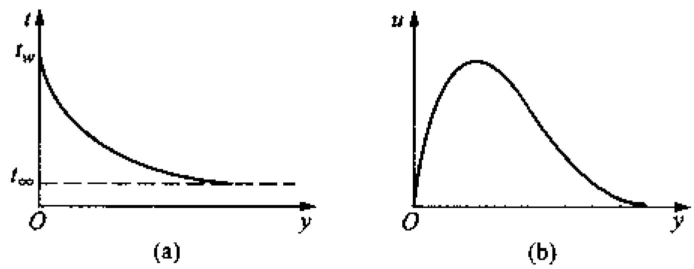


图 5.10 竖壁附近自然对流的速度与温度分布

自然对流亦有层流和湍流之分。以贴近一块热竖壁的自然对流为例来做分析，其自下而上的流动景象如图 5.11 所示。在壁的下部，流动刚开始形成时，它是有规则的层流；若壁面足够高，则上部流动会转变为湍流。不同的流动状态对换热是具有决定性影响的。层流时，换热热阻主要取决于薄层的厚度。从换热壁面下端开始，随着高度的增加，层流薄层的厚度也逐渐增加。与此相对应，局部表面传热系数 h_x 也随高度增加而减小。如果壁面高度足够高，流体的流动将

逐渐转变为湍流。这时湍流换热规律有所变化。旺盛湍流时，局部表面传热系数几乎是常量。

依据自然对流换热发生的几何条件，可分成大空间和有限空间两类。在众多的实用自然对流换热问题中，最常见的是大空间自然对流换热问题。流体在大空间作自然对流时，流体的冷却和加热过程互不影响。实际上只要热边界层不受干扰，都可以归入大空间自然对流换热的范围。例如，如图 5.12 所示的两个被同样加热的相隔不远的热竖壁：在底部封闭时，只要 $a/H>0.28$，壁面换热就可按大空间自然对流换热处理；在底部开口时，只要 $b/H>0.01$，则两个壁面上的边界层互不干扰，其换热也可采用大空间自然对流换热的计算公式。

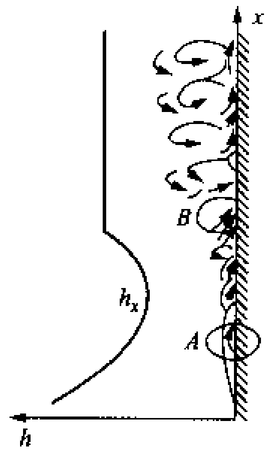


图 5.11　沿壁高的流动情况

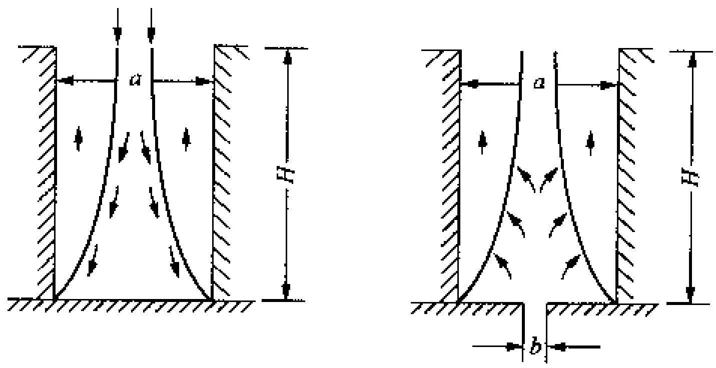


图 5.12　两个热竖壁形成的空气夹层内的热边界层

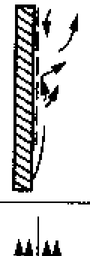
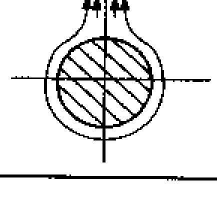
1. 大空间自然对流换热的实验关联式

工程中广泛使用的是下列形式的关联式

$$Nu = C(GrPr)^n \tag{5-37}$$

对于符合理想气体性质的气体，格拉晓夫准则数中的体积膨胀系数 $\alpha=1/T$。在自然对流换热关联式里，定性温度采用边界层的算术平均温度 $t_m=(t_w+t_\infty)/2$。t_∞ 指未受壁面影响的远处的流体温度。Gr 数中的 Δt 为 t_w 与 t_∞ 之差。特征长度的选择方案通常为：竖壁和竖圆柱取高度；横圆柱取外径。表 5.2 是按式(5-37)整理的几种典型的表面形状及其布置情况中由实验确定的常数 C 和 n 的值。

表 5.2　式(5-37)中的常数 C 和 n

加热表面形状与位置	流动情况示意	流态	系数 C 及指数 n		Gr 数适用范围
			C	n	
竖平板及竖圆柱		层流 过渡 湍流	0.59 0.0292 0.11	1/4 0.39 1/3	$10^4\sim3\times10^9$ $3\times10^9\sim2\times10^{10}$ $>2\times10^{10}$
横圆柱		层流 过渡 湍流	0.48 0.0445 0.10	1/4 0.37 1/3	$10^4\sim5.76\times10^8$ $5.76\times10^8\sim4.65\times10^9$ $>4.65\times10^9$

值得注意的是，竖圆柱使用与该竖平板公式所必须满足的条件是

$$\frac{d}{H} \geqslant \frac{35}{Gr_H{}^{1/4}} \tag{5-38}$$

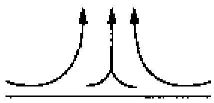
习惯上，对于常热流边界条件下的自然对流，往往采用下面方便的专用形式

$$Nu = B(Gr^* Pr)^m \tag{5-39}$$

式中，$Gr^* = GrNu = \frac{g\alpha q l^4}{\lambda v^2}$，定性温度取平均温度 t_m，特征长度对矩形管道取短边长。

按(5-39)式 Gr^* 整理的平板散热的结果示于表 5.3。需要注意的是这里流动比较复杂，不能套用层流及湍流的分类。

表 5.3　式(5-39)中的常数 B 和 m

加热表面形状与位置	流动图示	系数 B 及指数 p		Gr^* 数适用范围
		B	m	
水平板热面朝上或冷面朝下		1.076	1/6	$6.37\times10^5 \sim 1.12\times10^8$
水平板热面朝下或冷面朝上		0.747	1/6	$6.37\times10^5 \sim 1.12\times10^8$

例 5-1　大空间自然对流换热

已知：一直径为 2.0cm 的水平园柱换热管，管表面温度保持 38℃不变，将换热管置于 27℃的水中。试计算单位长度换热管的自然对流热损失。

解：特征温度为

$$T_f = \frac{38+27}{2} = 32.5℃$$

查表可知此时水的热导率为

$$\lambda = 0.630\text{W/(m·℃)}$$

此时，有

$$\frac{g\beta\rho^2 c_p}{\mu\lambda} = 2.48\times10^{10}(1/\text{m}^3\cdot℃)$$

因为 $GrPr$ 是上式乘以 $d^3\Delta T$，所以有

$$GrPr = 2.48\times10^{10}\times(38-27)\times(0.002)^3 = 2.18\times10^6$$

查表可知

$$C = 0.53$$

$$n = \frac{1}{4}$$

因此，有

$$Nu = 0.53\times(2.18\times10^6)^{1/4} = 20.36$$

$$h = \frac{20.36\times0.63}{0.02} = 642\text{W/(m}^2\cdot℃)$$

对换热管，则有

$$\frac{q}{L}=h\pi d(T_w-T_\infty)=642\pi\cdot 0.02\times(38-27)=443\mathrm{W/m}$$

2. 有限空间自然对流换热

这里仅讨论如图 5.13 所示的竖的和水平的两种封闭夹层的自然对流换热，而且推荐的实验关联式仅局限于气体夹层。

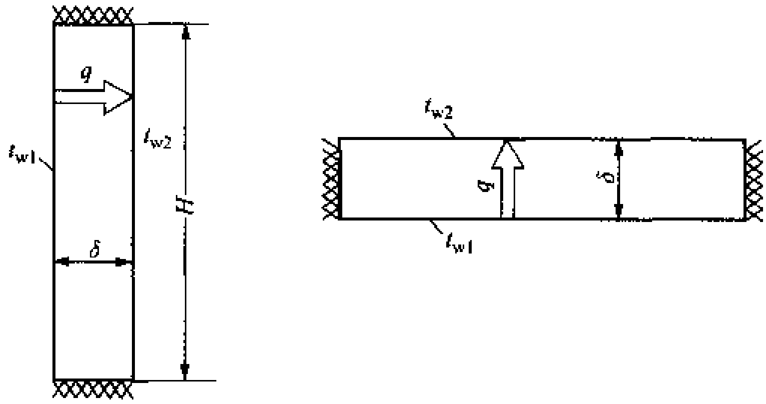


图 5.13 封闭夹层示意图($t_{w1}>t_{w2}$)

夹层内流体的流动，主要取决于以夹层厚度 δ 为特征长度的 Gr 数：

$$Gr_\delta=\frac{g\alpha\Delta t\delta^3}{\nu^2} \tag{5-40}$$

当 Gr_δ 极低时换热依靠纯导热：对于竖直夹层，当 $Gr_\delta\leqslant 2\,860$；对水平夹层，当 $Gr_\delta\leqslant 2\,430$。随着 Gr_δ 的提高，会依次出现向层流特征过渡的流动(环流)、层流特征的流动、湍流特征的流动。与之对应有几种不同的换热关联式。

在竖夹层自然对流换热中，纵横比 H/δ 对换热有一定影响。一般关联式为

$$Nu=C(Gr_\delta Pr)^n\left(\frac{H}{\delta}\right)^m \tag{5-41}$$

的形式。下列不同情况有不同的实验关联式中的 C,m,n 值。

对于竖空气夹层，推荐以下实验关联式：

$$Nu=0.197(Gr_\delta Pr)^{1/4}\left(\frac{H}{\delta}\right)^{-1/9},\ Gr_\delta=8.6\times10^3\sim2.9\times10^5 \tag{5-42}$$

$$Nu=0.073(Gr_\delta Pr)^{1/3}\left(\frac{H}{\delta}\right)^{-1/9},Gr_\delta=2.9\times10^5\sim1.6\times10^7 \tag{5-43}$$

对于水平空气夹层，推荐以下关联式：

$$Nu=0.212(Gr_\delta Pr)^{1/4},\ Gr_\delta=1\times10^4\sim4.6\times10^5 \tag{5-44}$$

$$Nu=0.061(Gr_\delta Pr)^{1/3},\ Gr_\delta>4.6\times10^5 \tag{5-45}$$

式中，定性温度均为$(t_{w1}+t_{w2})/2$，Re 数中的特征长度均为 δ。对竖空气夹层，H/δ 的实验验证范围为 $H/\delta=11\sim42$。

实际上，除了自然对流外，夹层中还有辐射换热，此时通过夹层的换热量应是两者之和。

例 5-2 有限空间自然对流换热

已知：两块边长为 20cm 水平放置的平板，平板之间的间距为 1cm，里面充满了 1atm 大气压的空气。下方的平板温度为 100℃，上方的平板温度为 40℃。试计算通过空气夹层的传热量。

解：首先计算夹层中空气的物理性质

特性温度：$T_f=\frac{100+40}{2}=70℃$

此温度下的其他物性参数分别为

$$\rho=\frac{P}{RT}=\frac{1.0132\times10^5}{287\times343}=1.029\text{kg/m}^3$$

$$\beta=\frac{1}{T_f}=\frac{1}{343}=2.915\times10^{-3}\text{K}^{-1}$$

$$\mu=2.043\times10^{-5}\text{kg/(m}\cdot\text{s)}$$

$$\lambda=0.0295\text{W/(m}\cdot℃)$$

$$Pr=0.7$$

特征长度为夹层的厚度，即 1cm

$$GrPr=\frac{9.8\times(1.029)^2\times(2.915\times10^{-3})\times(100-40)\times(0.01)^3}{(2.043\times10^{-5})^2}(0.7)=3043$$

根据附表，选取 $C=0.059$、$n=0.4$ 和 $m=0$，可得

$$\frac{\lambda_e}{\lambda}=0.059\times(3043)^{0.4}\left(\frac{0.2}{0.01}\right)^0=1.46$$

则

$$q=\frac{\lambda_e A(T_1-T_2)}{\delta}=\frac{1.460\times0.0295\times(0.2)^2\times(100-40)}{0.01}=10.34\text{W}$$

5.2.2 强制对流换热及实验关联式

本节讨论强制对流换热中最常见的三种典型情况——外掠平板强制对流、管槽内强制对流和横掠圆柱强制对流，说明它们在流动和换热规律上的主要特点和处理方法。

对强制对流换热而言，主要的影响因素有以下几种：

(1) 层流和湍流流动形态的影响。当 $Re<2300$ 时，流动为层流；当 $2300<Re<10000$时，流动处于过渡区内；当 $10000<Re$ 时，流动为旺盛湍流。流动状态的不同，对强制对流换热影响很大。

(2) 入口段的影响。由于入口段的热边界层薄，表面传热系数高。对于层流入口段：$1/d\approx0.05RePr$；而对于湍流入口段而言，$1/d\approx60$，如图 5.14 所示。

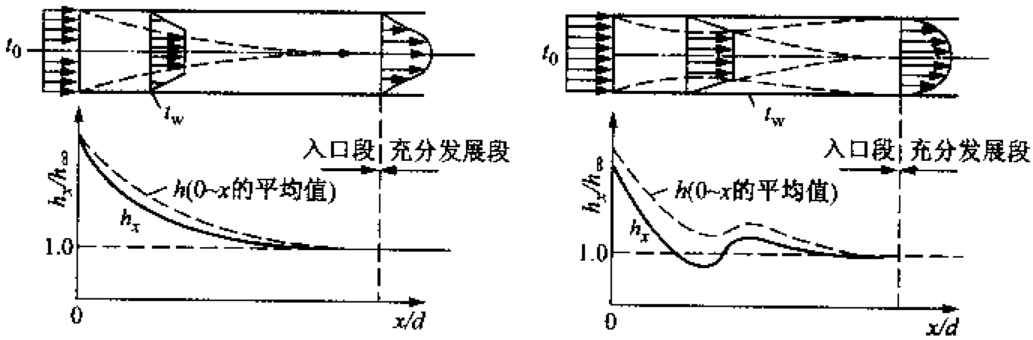


图 5.14 层流、湍流入口段示意图

(3) 热边界条件的影响。热边界条件有均匀壁温和均匀热流两种。对于湍流而言，除液

态金属外，两种条件的差别可不计；而对层流而言，两种边界条件下的表面传热系数差别明显，如图 5.15 所示。

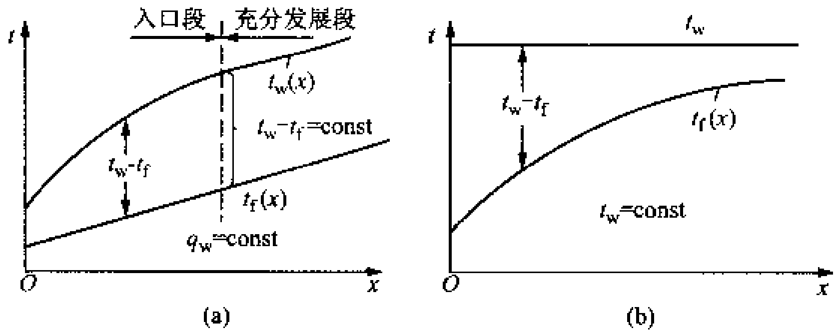


图 5.15　均匀热流密度与均匀壁温条件下流体温度及壁面温度沿主流方向的变化

(4) 特征速度及定性温度的确定。特征速度一般多取截面平均流速。定性温度多为截面上流体的平均温度(或进出口截面平均温度)。

(5) 牛顿冷却公式中的平均温差。对恒热流条件，可取(t_w-t_f)作为Δt_m。此时有

$$h_m A\Delta t_m = q_m c_p(t_f''-t_f') \tag{5-46}$$

式中，q_m 为质量流量；t_f''，t_f'分别为出口、进口截面上的平均温度；Δt_m 按对数平均温差计算：

$$\Delta t_m = \frac{t_f''-t_f'}{\ln\left(\dfrac{t_w-t_f'}{t_w-t_f''}\right)} \tag{5-47}$$

下面重点讨论几类常见的强制对流换热问题准则方程式的建立与计算。

1. 掠过平板的强制对流换热问题

考虑一个掠过平板的强制对流换热问题，其动量方程可简化为

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5-48}$$

联立能量方程：

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \tag{5-49}$$

两者在形式上完全类似。只要 $\nu=a$，且 u 与 t 具有相同的边界条件：

例如，

$$y=0:\quad u=u_w,\quad t=t_w$$
$$y=\infty:\quad u=u_\infty,\quad t=t_\infty$$

则$\dfrac{u-u_w}{u_\infty-u_w}$与$\dfrac{t-t_w}{t_\infty-t_w}$的分布完全相同(即为同解)。

可见，当 $\nu/a=1$ 时，如果热边界层和流动边界层厚度的定义相同，则有 $\delta=\delta_t$。

前已述及普朗特数(Pr)的表达式 $Pr=\nu/a=c_p\eta/\lambda$，它反映了流体中动量扩散与热扩散能力的对比，也反映了流动边界层与热边界层厚度的相对大小。

努塞尔数(Nu)，$Nu_x=h_x x/\lambda$。

通过求解热边界层厚度，可得

$$\delta_t=\frac{Pr^{-1/3}}{1.026}\delta=4.52Pr^{-1/3}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \tag{5-50}$$

根据热边界层厚度可求得局部表面传热系数及局部努塞尔数

$$h_x = 0.332\frac{\lambda}{x}Re_x^{1/2}Pr^{1/3} \tag{5-51}$$

$$Nu_x = 0.332Re_x^{1/2}Pr^{1/3} \tag{5-52}$$

平均努塞尔数为

$$Nu = \frac{hl}{\lambda} = 0.664Re^{1/2}Pr^{1/3} \tag{5-53}$$

上述各式中，定性温度均取 $t_m=(t_\infty+t_w)/2$。

计算表明，准则方程式(5-53)与波尔豪森的精确解相吻合，而且在 $Re\leqslant 2\times10^5$ 的层流范围内与实验结果也颇为相符，如图 5.16 所示。

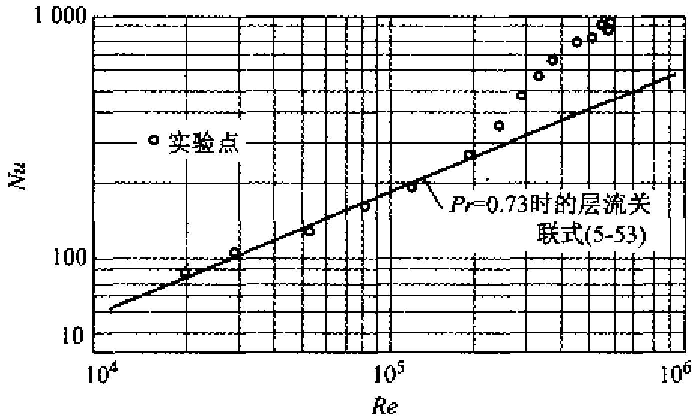


图 5.16　外掠平板强制对流换热的实验结果与理论解的比较

当平板长度 l 大于临界长度 x_c 时，平板上的边界层可看成由层流段和湍流段组成。对于 $Re>5\times10^5$ 外掠等温平板的流动，

$$h_m = \frac{\lambda}{L}\left[0.332\left(\frac{u_\infty}{v}\right)^{1/2}\int_0^{x_c}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + 0.0296\left(\frac{u_\infty}{v}\right)^{4/5}\int_{x_c}^{1}x^{-\frac{1}{5}}\mathrm{d}x\right]Pr^{1/3} \tag{5-54}$$

积分后可得

$$Nu_m = [0.664Re_c^{1/2} + 0.037(Re^{4/5} - Re_c^{4/5})]Pr^{1/3} \tag{5-55}$$

其中 Re 为临界雷诺数，如果取 $Re_c=5\times10^5$，则定性温度为边界层平均温度，特征尺度取板全长；速度为来流速度。式(5-55)也可写成

$$Nu_m = (0.037Re^{4/5} - 871)Pr^{1/3} \tag{5-56}$$

掠过平板的强制对流换热准则方程式(5-56)可用于工程计算。

例 5-3　外掠平板的强制对流换热

已知：环境空气温度为 0℃，并且风速以 6m/s 的速度平行的吹过一太阳能集热器的表面。该表面的尺寸为 1m×1m，其中一个边与来流方向垂直。表面平均温度为 20℃。试求对流换热而造成的热损失。

解：特征温度：$t_m=\frac{0+20}{2}=10$ ℃

在此温度下的空气的物性参数查表可得

$$\lambda=0.0251\text{W(m}\cdot\text{K)}$$

$$v=14.16\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$$

$$Pr=0.705$$

通过风速可以算出雷诺数 Re

$$Re=\frac{uL}{v}=\frac{6\times1}{14.16\times10^{-6}}=4.237\times10^{5}<5\times10^{5}$$

因此根据 Nu 数的计算式可得

$$Nu=0.664Re^{0.5}Pr^{1/3}=0.664\times(4.237\times10^{5})^{0.5}\times(0.705)^{1/3}=384.7$$

$$h=\frac{384.7\times0.0251}{1}=9.66\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$$

因此可得

$$\Phi=Ah\Delta t=1\times9.66\times20=193\text{W}$$

例 5-4 外掠平板的强制对流换热(需根据已知条件先假定表面温度,再根据结果比较确定)

已知:飞机的机翼可近似地看成是一块置于平行气流中的长 2.5m 的平板,飞机的飞行速度为每小时 400km,空气压力为 0.7×10^5Pa,空气温度为−10℃。机翼顶部吸收的太阳辐射为 800W/m²,而其自身辐射略去不计。试计算处于稳态时机翼的温度(假设温度是均匀的)。

解:不计自身辐射时,机翼得到的太阳能辐射=机翼对空气的对流换热。

由于已知条件中并未告知机翼表面的温度,从而无法确定特征温度,因此需要假定机翼表面的平均温度。于是设 $t_w=-6.5$℃,则

$$t_m=\frac{-10-6.5}{2}=-8.25℃,$$

在此温度下的空气的物性参数查表可得

$$\lambda=0.0239\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$$

$$v=12.73\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$$

$$Pr=0.706$$

通过飞机的速度可以算出雷诺数 Re

$$Re=\frac{(400\,000/3\,600)\times25}{12.73\times10^{-6}}=2.18\times10^{7}>5\times10^{5}$$

因此根据 Nu 数的计算式可得

$$Nu=0.037Re^{0.8}Pr^{1/3}=0.037\times(2.18\times10^{7})^{0.5}\times(0.706)^{1/3}=24\,467$$

$$h=\frac{244\,67\times0.0239}{2.5}=234\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$$

于是可得此时的散热量为

$$q=h\Delta t=234\times3.5=819\text{W}/\text{m}^2$$

$$\text{erf}=\frac{q-q_0}{q_0}=\frac{819-800}{800}=2.375\%$$

与所吸收的太阳辐射 800W 相差 2.375%,可以认为 $t_w=-6.5$℃即为所求之解。

2. 管内湍流换热实验关联式

1) 中等以下温度差的管内湍流强制对流换热

中等以下温度差是指按照计算准确程度所确定的温差范围。一般来说,对于气体不超过50℃;对于水不超过 20~30℃;对于 $1/\eta\cdot d\eta/dt$ 大的油类不超过 10℃。工业上使用最广的关联式是迪图斯-贝尔特(Dittus−Boelter)公式:

$$Nu_f = 0.023Re_f^{0.8}Pr_f^n \tag{5-57}$$

加热流体时 $n=0.4$，冷却流体时 $n=0.3$。此式适用于流体与壁面具有中等以下温度差的场合。式中，定性温度 t_f 采用流体平均温度（即管道进、出口两个界面平均温度的算术平均值），特征长度为管内径。实验验证范围：$Re_f=10^4\sim1.2\times10^5$，$Pr_f=0.7\sim120$，$L/d\geqslant60$。

2）大温差的管内湍流强制对流换热

对于大温差情形，需采用迪图斯-贝尔特修正公式进行计算：

$$Nu_f = 0.023Re_f^{0.8}Pr_f^n c_t \tag{5-58}$$

当气体被加热时，$c_t=\left(\frac{T_f}{T_w}\right)^{0.5}$；当气体被冷却时，$c_t=1$。

对液体而言，$c_t=\left(\frac{\eta_f}{\eta_w}\right)^m$。当液体受热时，$m=0.11$；当液体被冷却时，$m=0.25$。

实际上，由于流体截面上的温度并不均匀，导致速度分布发生畸变，如图 5.17 所示。一般在关联式中引进乘数 $(\eta_f/\eta_w)^n$ 或 $(Pr_f/Pr_w)^n$，以考虑不均匀物性场对换热的影响。

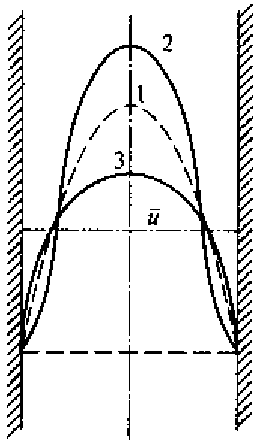


图 5.17 换热时管内速度分布的畸变

(3) 考虑不均匀物性影响的管内湍流强制对流换热

如果考虑不均匀物性影响，推荐采用齐德-泰特公式或米海耶夫公式。

齐德-泰特公式：

$$Nu_f = 0.027Re_f^{0.8}Pr_f^{1/3}\left(\frac{\eta_f}{\eta_w}\right)^{0.14} \tag{5-59}$$

式中，定性温度为流体平均温度 t_f（η_w 按壁温 t_w 确定），管内径 D 为特征长度。实验验证范围为：$L/d\geqslant60$，$Pr_f=0.7\sim16\,700$，$Re_f\geqslant10^4$。

米海耶夫公式：

$$Nu_f = 0.021Re_f^{0.8}Pr_f^{0.43}\left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0.25} \tag{5-60}$$

式中，定性温度为流体平均温度 t_f，特征长度为管内径。

实验验证范围为：$L/d\geqslant50$，$Pr_f=0.6\sim700$，$Re_f=10^4\sim1.75\times10^6$。

下面讨论上述准则方程在一些特殊条件下的应用。

(1) 非圆形截面槽道。工程上对于非圆形截面槽道的湍流换热计算，用当量直径作为特征尺度处理，从而可以应用上述准则方程进行计算。定义当量直径 d_e 为

$$d_e = \frac{4A_c}{P} \tag{5-61}$$

式中，A_c 为槽道的流动截面积；P 为湿周长。

值得注意的是，对截面上出现尖角的流动区域，采用当量直径的方法会导致较大的误差。

(2) 弯管修正系数。当流动通过弯管处，由于二次环流所带来的对流动的扰动强化了换热。图 5.18 所示，二次环流的定性描述。一般采用弯管、螺线管修正系数予以修正：

液体，$c_r=1+10.3\left(\frac{d}{R}\right)^3$

气体，$c_r=1+1.77\,\frac{d}{R}$

(3) 考虑 Pr 数很小的液态金属的管内湍流强制对流换热。上述方程仅适用于 $Pr>0.6$ 的气体或液体。对 Pr 数很小($Pr=0.003\sim0.05$)的液态金属,换热规律完全不同。推荐两个适用该情况的光滑圆管内充分发展湍流换热的准则式:

① 均匀热流边界条件下。

$$Nu_f = 4.82 + 0.0185 Pe_f^{0.827} \qquad (5\text{-}62)$$

实验验证范围:$Re_f=3.6\times10^3\sim9.05\times10^5$, $Pe_f=10^2\sim10^4$。

② 均匀壁温边界条件下。

$$Nu_f = 5.0 + 0.025 Pe_f^{0.8} \qquad (5\text{-}63)$$

实验验证范围:$Pe_f>100$。

式(5-62)与式(5-63)中,特征长度均为内径,定性温度均为流体平均温度。

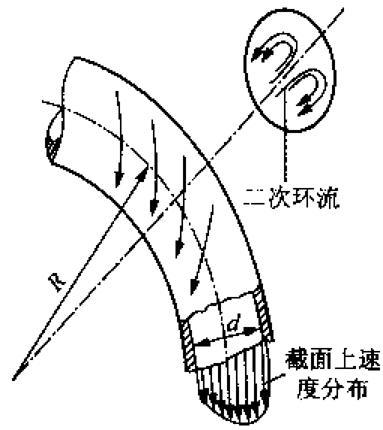
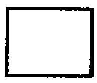
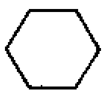
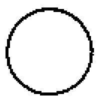
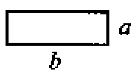
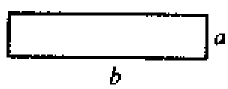
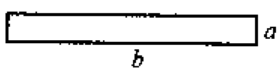
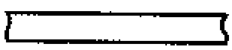


图 5.18　螺旋管中的二次环流

3. 管内层流换热关联式

层流充分发展对流换热的理论分析结果很多,表 5.4 中列出一些代表性结果。

表 5.4　不同截面形状的管槽内层流充分发展换热的 Nu 数

截面形状		$Nu=hd_e/\lambda$ 均匀热流	$Nu=hd_e/\lambda$ 均匀壁温	$fRe\left(Re=\dfrac{ud_e}{v}\right)$①
正三角形		3.11	2.47	53
正方形		3.61	2.98	57
正六边形		4.00	3.34	60
圆		4.36	3.66	64
$\frac{b}{a}=2$ 长方形		4.12	3.39	62
$\frac{b}{a}=3$		4.79	3.96	69
$\frac{b}{a}=4$		5.33	4.44	73
$\frac{b}{a}=8$		6.49	5.60	82
$\frac{b}{a}=\infty$		8.23	7.54	96

实际工程换热设备中,层流时的换热常常处于入口段的范围。可采用下列齐德-泰特公式来计算长为 l 的管道的平均 Nu 数:

$$Nu_f = 1.86\left(\frac{Re_f Pr_f}{l/d}\right)^{1/3}\left(\frac{\eta_f}{\eta_w}\right)^{0.14} \qquad (5\text{-}64)$$

式中，定性温度为流体平均温度 t_f（η_f 按壁温 t_w 确定）；管内径为特征长度，管道处于均匀壁温的状态。实验验证范围为：$Pr_f=0.48\sim16\,700$，$\frac{\eta_f}{\eta_w}=0.004\,4\sim9.75$，$\left(\frac{Re_f Pr_f}{l/d}\right)^{1/3}\left(\frac{\eta_f}{\eta_w}\right)^{0.14}\geqslant2$。

例 5-5　管内强制对流换热

已知：在 2atm 压力下、平均温度为 200℃的空气以 10m/s 的速度流过一直径为 2.54cm 的加热管，管壁热流密度保持恒定，且管壁的温度始终比空气温度高 20℃。试计算单位长度管子的传热量。

解：首先，需要计算雷诺数 Re 以确定流动形态；然后选择合适的经验公式计算传热量。平均温度为 200℃的空气的物性参数为

$$\rho=\frac{P}{RT}=\frac{2\times(1.013\,2\times10^5)}{287\times473}=1.493\mathrm{kg/m^3}$$

$$Pr=0.681$$

$$\lambda=0.038\,6\mathrm{W/(m\cdot K)}$$

$$\mu=2.57\times10^{-5}\mathrm{kg/(m\cdot s)}$$

$$c_p=1.025\mathrm{kJ/(kg\cdot ℃)}$$

$$Re_f=\frac{\rho u d}{\mu}=\frac{1.493\times10\times0.025\,4}{2.57\times10^{-5}}=14\,756$$

因流动是湍流，故使用湍流的实验关联式进行计算

$$Nu_f=\frac{hd}{\lambda}=0.023Re_f^{0.8}Pr^{0.4}=0.023\times(14\,756)^{0.8}\times(0.681)^{0.4}=42.67$$

$$h=\frac{\lambda}{d}Nu_f=\frac{0.038\,6\times42.67}{0.025\,4}=64.85\mathrm{W/(m^2\cdot ℃)}$$

因此，单位长度的换热量为

$$\frac{q}{L}=h\pi d(T_W-T_f)=64.85\times0.0254\pi\times20=103.5\mathrm{W/m}$$

4. 外部流动横掠单管换热实验关联式

所谓外部流动是指换热壁面上的流动边界层与热边界层能自由发展，不受邻近壁面存在限制的一种流动。而横掠单管则是指流体沿着垂直于管子轴线的方向流过管子表面。流体横掠单管流动除了具有边界层特征，还会发生绕流脱体而产生回流、旋涡和涡束。图 5.19 示出了横掠单管的流动情形。所谓绕流脱体，定性的看就是指由于流体绕掠圆管时，沿程压力发生

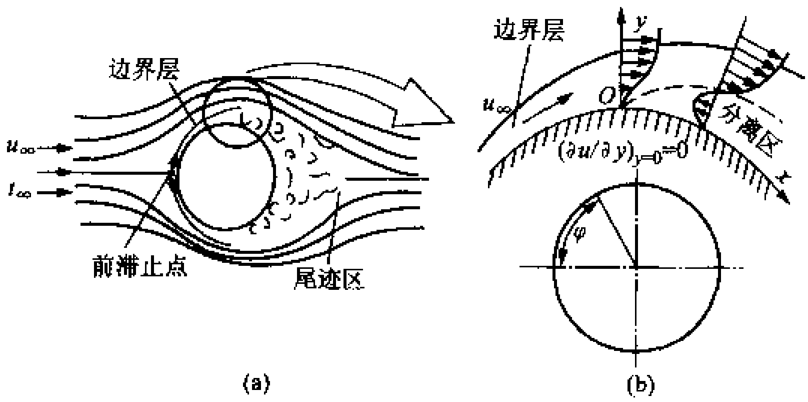


图 5.19　横掠单根圆管流动情形

变化，在圆管的前半部压力递降，在其后半部压力回升。在边界层内，流体靠本身的动量克服压力增长而向前流动，速度分布趋于平缓。但近壁流动层因其动量不够大，在克服上升的压力时"力不从心"，导致壁面处速度梯度为零的局面。随后产生与原动力方向的回流，并从该处边界层内缘脱离壁面形成绕流脱体现象，如图 5.19 虚线所示。绕流脱体现象点的位置取决于 Re 数。$Re<10$ 时不出现脱体；$10<Re<1.5\times10^4$ 时边界层为层流，脱体发生在 $\Phi=80°\sim85°$ 处。当 $Re>1.5\times10^4$ 时，边界层在脱体前已转变为湍流，脱体起点退后到 $\Phi=140°$处。

边界层的成长和脱体决定了外掠圆管换热的特征。如图 5.20 所示是恒定热流壁面局部努塞尔数随角度 ϕ 的变化。

虽然局部表面传热系数变化比较复杂，但从平均表面传热系数看（参看图 5.21），渐变规律性很明显。为计算方便，推荐以下分段幂次关联式：

$$Nu = CRe^nPr^{1/3} \tag{5-65}$$

式中，C 及 n 的值如表 5.5 所示；定性温度为 $(t_w+t_\infty)/2$；特征长度为管外径；Re 数的特征速度为来流速度 u_∞。该式对空气的实验温度验证范围为：$t_w=21\sim1\,046$℃，$t_\infty=15.5\sim982$℃。

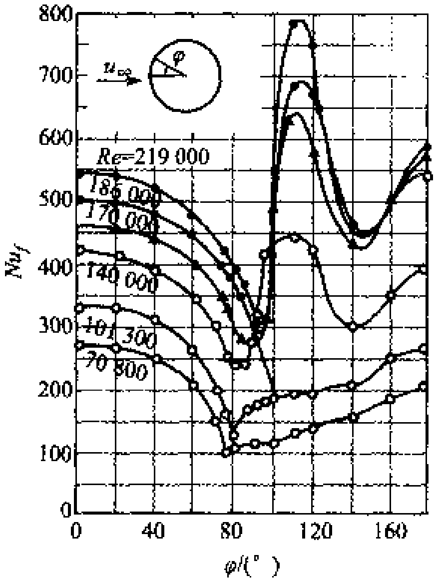


图 5.20 横掠圆管局部传热系数的变化

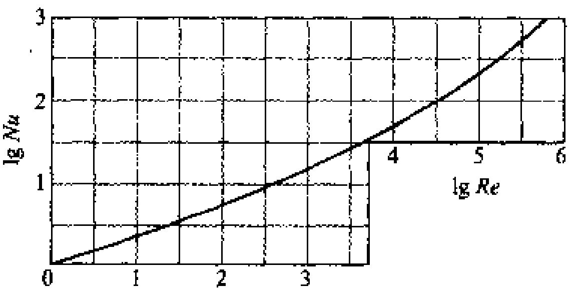


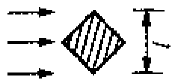
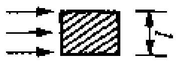
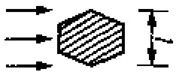
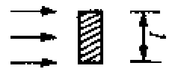
图 5.21 空气横掠圆管局部传热系数的变化

对于气体横掠非圆形截面的柱体或管道的对流换热也可采用式(5-65)计算。对于几种常见截面形状的柱体，系数 C 及 n 值如表 5.6 所示。表中示出的几何尺寸 l 是计算 Re 数及 Nu 数时用的特征长度。定性温度为 $(t_w+t_\infty)/2$。

表 5.5 C 及 n 的值

Re	C	n
0.4～4	0.989	0.330
4～40	0.911	0.385
40～4 000	0.683	0.466
4 000～40 000	0.193	0.618
40 000～400 000	0.026 6	0.805

表 5.6 C及n的值

		Re	C	n
正方形		$5\times10^3\sim10^5$	0.246	0.588
		$5\times10^3\sim10^5$	0.102	0.675
正六边形		$5\times10^3\sim1.95\times10^4$ $1.95\times10^4\sim10^5$	0.160 0.0385	0.638 0.782
		$5\times10^3\sim10^5$	0.153	0.638
竖直平板		$4\times10^3\sim1.5\times10^4$	0.228	0.731

式(5-65)这种准则式的形式简单，但对于如图 5.21 所示的宽广范围内的实验数据需要分段整理。邱吉尔(S. W. Churchill)与朋斯登(M. Bernstein)对流体横向外掠单管提出了以下在整个实验范围内都能适用的邱吉尔-朋斯登准则方程式：

$$Nu = 0.3 + \frac{0.62Re^{1/2}Pr^{1/3}}{[1+(0.4/Pr)^{2/3}]^{1/4}}\left[1+\left(\frac{Re}{282\,000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} \tag{5-66}$$

式中，定性温度为$(t_w+t_\infty)/2$，适用于$RePr>0.2$的情形。

例 5-6 横掠圆柱(空气横掠过等温圆柱)。

已知：在 1atm 压力下、35℃的空气以 50m/s 的速度横掠过直径为 5.0cm 的圆柱，圆柱表面温度保持 150℃不变。试计算单位长度圆柱上的散热量。

解：首先需要确定雷诺数以选择合适的实验关联式。必须先确定定性温度和此温度下的空气的物性参数

$$T_f=\frac{T_w+T_\infty}{2}=\frac{150+35}{2}=92.5℃=365.5\text{K}$$

$$\rho=\frac{P}{RT}=\frac{1.0132\times10^5}{287\times365.5}=0.966\text{kg/m}^3$$

$$\mu=2.14\times10^{-5}\text{kg/(m·s)}$$

$$\lambda=0.0312\text{W/(m·k)}$$

$$Pr=0.695$$

$$Re_f=\frac{\rho u_\infty d}{\mu}=\frac{0.966\times50\times0.05}{2.14\times10^{-5}}=1.129\times10^5$$

通过查表可得

$$C=0.0266 \qquad n=0.805$$

由此可得

$$\frac{hd}{\lambda}=0.0266\times(1.129\times10^5)^{0.805}\times(0.695)^{1/3}=275.1$$

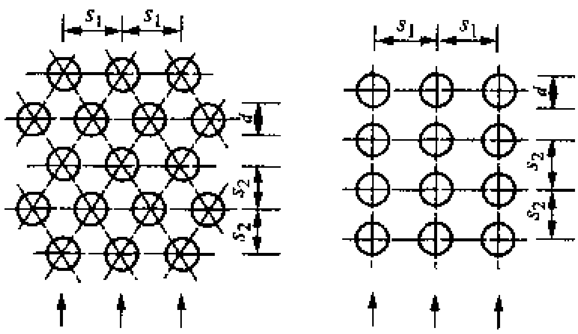
$$h=\frac{275.1\times0.0312}{0.05}=171.7\text{W/(m}^2\cdot℃)$$

因此单位长度圆柱体的传热量为

$$\frac{q}{L}=h\pi d(T_w-T_\infty)=171.7\times0.05\pi\times(150-35)=3\,100\text{W/m}$$

5. 横掠管束换热实验关联式

横掠管束换热在换热器及锅炉、暖风器等专用换热设备中最为常见。通常管道有叉排和顺排两种排列方式，如图5.22所示。叉排时由于流体在管间交替收缩和扩大的通道中流动，受到比顺排更强烈的扰动，故其换热比顺排时强。但叉排管束阻力损失大于顺排，且在清洗管束时，顺排比叉排方便；易于清洗。所以对于叉排、顺排的选择要全面权衡。



(a) 叉排　(b) 顺排

图5.22　叉排与顺排管束

影响管束换热的因素除 Re，Pr 数外（若仅限于讨论气体，则 Pr 数可不包括在内），还有叉排或顺排管间距（横向间距 S_1 和纵向间距 S_2）和管束排数。根据格里姆森（Grimson）的实验结果，后排管受前排管尾流的扰动作用对平均表面传热系数的影响直到10排以上的管道才能消失。对这种影响的常用处理方法是，先总结出可以不考虑排数影响的实验关联式，然后把管束排数的影响因素用修正系数考虑。

1）气体横掠10排以上管束的实验关联式

$$Nu=CRe^m \tag{5-67}$$

式中，定性温度为 $t_r=(t_w+t_f)/2$；特征长度为管外径 d，Re 数中的流速采用整个管束中最窄截面处的流速。C 和 m 的值如表5.7所示。该式的实验验证范围：$Re_f=2\,000\sim40\,000$。

表5.7　C和m之值

s_2/d ＼ s_1/d	1.25		1.5		2		3	
	C	m	C	m	C	m	C	m
顺　排								
1.25	0.348	0.592	0.275	0.608	0.100	0.704	0.0633	0.752
1.5	0.367	0.586	0.250	0.620	0.101	0.702	0.0678	0.744
2	0.418	0.570	0.299	0.602	0.229	0.632	0.198	0.648
3	0.290	0.601	0.357	0.584	0.374	0.581	0.286	0.608
叉　排								
0.6							0.213	0.636
0.9					0.446	0.571	0.401	0.581
1			0.497	0.558				
1.125					0.478	0.565	0.518	0.560
1.25	0.518	0.556	0.505	0.554	0.519	0.556	0.522	0.562
1.5	0.451	0.568	0.460	0.562	0.452	0.568	0.488	0.568
2	0.404	0.572	0.416	0.568	0.482	0.556	0.449	0.570
3	0.310	0.592	0.356	0.580	0.440	0.562	0.421	0.574

2）流体横掠10排以下管束的实验关联式

对于排数少于10排的管束，平均表面传热系数可在式（5-67）的基础上乘以管排修正系数

ε_n，得到

$$h' = \varepsilon_n h \tag{5-68}$$

ε_n 的值引列在表 5.8 中。

表 5.8 管排修正系数 ε_n

总排数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
顺排	0.64	0.80	0.87	0.90	0.92	0.94	0.96	0.98	0.99	1.0
叉排	0.68	0.75	0.83	0.89	0.92	0.95	0.97	0.98	0.99	1.0

3) 茹卡乌斯卡斯(A. A. * ykayckac)实验关联式

针对很宽的 Pr 数变化范围内，茹卡乌斯卡斯对流体外掠管束换热总结出一套更便于使用的公式，列出于表 5.9 及 5.10 中。当沿流体流动方向排数大于或等于 16 时，这些公式可用来计算管束平均表面传热系数。式中定性温度为管束进出口流体平均温度；Pr_w 按管束的平均壁温确定；Re 数中的流速取管束中最小截面处的平均流速；特征长度为管道外径。这些关联式的实验验证范围是 $Pr=0.6\sim500$。对于排数小于 16 的管束，其平均表面传热系数可按表 5.9，表 5.10 计算所得之值再乘上小于 1 的修正值 ε_n。修正值 ε_n 列于表 5.11。

表 5.9 流体横掠顺排管束平均表面传热系数计算关联式(≥16 排)

关联式	适用 Re 数范围
$Nu_f=0.9Re_f^{0.4}Pr_f^{0.36}(Pr_f/Pr_w)^{0.25}$	$1\sim10^2$
$Nu_f=0.52Re_f^{0.5}Pr_f^{0.36}(Pr_f/Pr_w)^{0.25}$	$10^2\sim10^3$
$Nu_f=0.27Re_f^{0.63}Pr_f^{0.36}(Pr_f/Pr_w)^{0.25}$	$10^3\sim2\times10^5$
$Nu_f=0.033Re_f^{0.8}Pr_f^{0.36}(Pr_f/Pr_w)^{0.25}$	$2\times10^5\sim2\times10^6$

表 5.10 流体横掠叉排管束平均表面传热系数计算关联式(≥16 排)

关联式	适用 Re 数范围
$Nu_f=1.04Re_f^{0.4}Pr_f^{0.36}(Pr_f/Pr_w)^{0.25}$	$1\sim5\times10^2$
$Nu_f=0.71Re_f^{0.5}Pr_f^{0.36}(Pr_f/Pr_w)^{0.25}$	$5\times10^2\sim10^3$
$Nu_f=0.35\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{0.2}Re_f^{0.6}Pr_f^{0.36}(Pr_f/Pr_w)^{0.25},\ \frac{s_1}{s_2}\leqslant2$	$10^3\sim2\times10^5$
$=0.40Re_f^{0.6}Pr_f^{0.36}(Pr_f/Pr_w)^{0.25},\ \frac{s_1}{s_2}>2$	$10^3\sim2\times10^5$
$Nu_f=0.031\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{0.2}Re_f^{0.8}Pr_f^{0.36}(Pr_f/Pr_w)^{0.25}$	$2\times10^5\sim2\times10^6$

表 5.11 茹卡乌斯卡斯公式的管排修正系数 ε_n

总排数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
顺排，$Re>10^3$	0.700	0.800	0.865	0.910	0.928	0.942	0.954	0.965	0.972	0.978	0.983	0.987	0.990	0.992	0.994
叉排 $10^2<Re<10^3$	0.832	0.874	0.914	0.939	0.955	0.963	0.970	0.976	0.980	0.984	0.987	0.990	0.993	0.996	0.999
$Re>10^3$	0.619	0.758	0.840	0.897	0.923	0.942	0.954	0.965	0.971	0.977	0.982	0.986	0.990	0.994	0.997

6. 自然对流与强制对流并存的混合对流

在强制对流换热中有时既需要考虑强制对流，也需要考虑自然对流。判断能否忽略自然对流影响的判据是什么呢？应用相似分析法可知，Gr 数中包含着浮升力与黏滞力的比值，而由惯性力与黏滞力的对比可得 Re 数。我们需要的是浮升力与惯性力的对比。这个对比参量

可从特征数 Gr，Re 的组合中消去黏度得到

$$\frac{g\alpha\Delta t l^3}{\nu^2}\frac{\nu^2}{u^2 l^2}=\frac{Gr}{Re^2} \tag{5-69}$$

这就是判断自然对流影响程度的判据。一般认为，$Gr/Re^2\geqslant 0.1$ 时自然对流的影响不能忽略；而 $Gr/Re^2\geqslant 10$ 时强制对流的影响相对于自然对流可以忽略不计。由此可对流动区域进行分区：自然对流对总传热量的影响低于10%的作为纯强制对流；强制对流对总传热量的影响低于10%的作为纯自然对流；这两部分都不包括的中间区域为混合对流。图5.23及图5.24为按此建立起来的流动区域划分图，对问题的分区起指导作用。两图的适用范围为 $10^{-2}<Pr d/l<1$。图中，Gr 数根据管内径 d 及 $\Delta t=t_w-t_f$ 计算。定性温度采用平均温度 $t_m=(t_w+t_f)/2$。在换热壁面附近，自然对流与强制对流方向相同时起强化换热作用，方向相反则起减弱作用。混合对流的实验关联式这里不予讨论。此处仅推荐一个简单的估算方法：

$$Nu_M^n = Nu_F^n \pm Nu_N^n \tag{5-70}$$

其中 Nu_M 为混合对流时的 Nu 数，而 Nu_F，Nu_N 则为按给定条件分别用强制对流及自然对流准则式计算的结果。两种流动方向相同时取正号，相反时取负号，n 的值通常取为3。

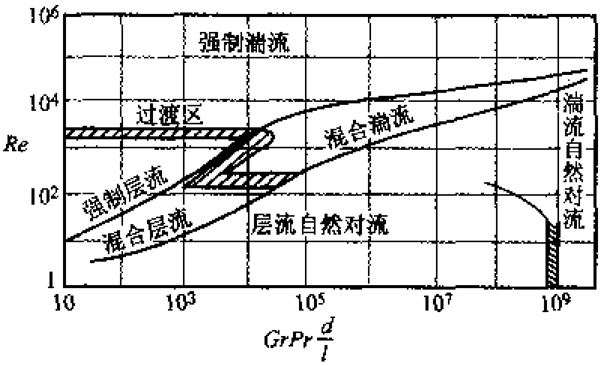


图5.23 竖管内强制、自然、混合流动区的划分

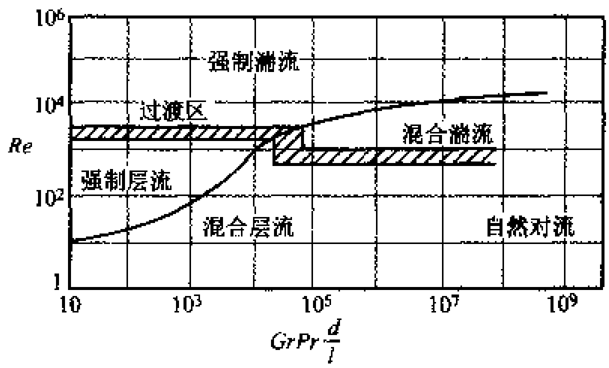


图5.24 横管内强制、自然、混合流动区的划分

习 题

1. 利用流体外掠平板边界层中的速度分布

$$\frac{u}{u_\infty}=\frac{y}{\delta}$$

推导离开前缘 x 处边界层厚度的表达式。

2. 压力为2atm、温度为27℃的氧气，掠过边长为50cm的方形平板，流速为30m/s。平板温度保持在127℃不变。试计算平板的总热损失。

3. 流体从两平行平板间流过，试推导充分发展状态，速度分布随距中心线距离变化的表达式。

4. 10℃，0.2atm的空气掠过边长为20cm的方形平板，流速为5m/s。平板表面有热源提供稳定热流，使平板表面平均温度保持在100℃。试计算平板表面的热流量以及距离前缘 x 处的对流传热系数。

5. 以下流体掠过边长为1m的平板，欲使雷诺数为 10^7，各自需要多大的流速？(1)20℃的水；(2)1atm、20℃的空气；(3)20℃的氟利昂；(4)20℃的氨；(5)20℃的氢。

6. 边长为 10cm 的方板，内置电加热源可产生稳定热流。10℃的水以 2m/s 的速度掠过平板。如果平板温度不能超过 80℃，需要散出的总热量是多少？

7. 比较以下三种情况下的平均传热系数：(1)1atm、300K 的空气掠过大平板，$Re_L=10^5$；(2)1atm、300K 的氦掠过平板，ρu_∞ 和 L 的值和(1)相同；(3)300K 的液态水掠过大平板，ρu_∞ 和 L 的值和(1)相同。物性参数均取 $T=300\text{K}$ 时的值。从比较中，你能得出什么结论？

8. 有一边长为 10cm 的方形板，内置电加热源，可产生 1 000 W/m² 的稳定热流。4atm、300K 的气流以 35m/s 的速度掠过该平板，平板表面出现的最高温度是多少？

9. 在某种程序中，外掠平板的临界雷诺数为 10^6。运用此临界雷诺数，1atm、300K 的空气，以 10m/s 的速度掠过一等温平板。平板温度为 400K，平板末端雷诺数为 5×10^6。试计算该系统的平均对流传热系数、平板长度以及平板的热损失。

10. 液态氨流动在横截面为边长 0.1cm 的等边三角形的输送管内，流体体积平均温度是 20℃，管壁温度是 50℃。充分发展的层流流动的经验雷诺数是 1000。试计算管道单位长度的传热量。

11. 液体流动在平均温度是 20℃、横截面是 5×10mm 管道内，如果管壁的温度恒定为 60℃，充分发展的层流运动是经验数值。请计算单位长度的传热量。

12. 在直径 2.5cm 的管道内，水以 0.8kg/s 的速度流动。管壁温度是 90℃。问如果将水从 35℃加热到 40℃，需要管道的长度是多少？

13. 温度 38℃的机器润滑油进入长度是 3m、直径是 1.25cm 的管道。管壁温度恒定在 65℃，流动速度是 30cm/s。估计管壁传给油的总传热量是多少，油的出口温度是多少？

14. 现有 1atm、15℃的气体流过 7.5×15cm 的矩形管道。其中一段长为 1.8m 的管道温度保持在 120℃，这段管道出口处的气体平均温度是 65℃。试计算气体的流动速度及总的传热量。

15. 温度为 71℃、速度为 0.4kg/s 的水被冷却到 32℃。问水在恒定温度是 4℃、直径是 12.5mm 的管道中，或者恒定温度是 20℃，直径是 25mm 的管道中，这两者哪一个会得到更大的压降？

16. 空调系统管道的横截面积为 45×90cm、压力为 1atm.温度为 300K 的气体以 7.5m/s 的速度流入管道。试计算系统的传热系数以及单位长度上的压降。

17. 流体流入直径为 3.0cm 的管道，管壁的温度恒定在 80℃，且它的相对粗糙度为 0.002。如果流体的进口温度是 20℃，试估计雷诺数为 10^5 时的对流传热系数是多少？

18. 温度为 21℃的水流入直径是 3mm 的管道出口温度是 32℃。流体流动下相应的雷诺数为 600。管子的长度为 10cm，且管壁温度保持在 60℃。试请计算水流的速度。

19. 温度为 15℃的水流入直径是 3.0cm 的管道，出口温度是 38℃。水流速度为 1.0m/s，且管壁温度保持在 60℃。试计算管道的长度。

20. 假定人体可以看作是一个直径 30cm、高 1.1m 、温度 24℃的圆柱体。试计算当一个人站在温度 0℃、流速 30m/h 的风中时，他的散热量是多少？

21. 1atm，90℃的气流以 6m/s 的速度流过直径 1.5mm 的热导线。导线被加热到 150℃。试问单位长度的导线的传热量。

22. 一段温度恒为 30℃且截面为 30×30cm 的管道。现让压力为 1atm，温度为 50℃的气流以 6m/s 的速度流过管道。请计算管道得到的热量。如果将气流的速度减为原来的一半。

管道得到的传热量又是多少？

23. 温度为 10℃的甘油流入长为 1m、横截面为 1×8cm 的管道中。对应流速下的雷诺数为 250。请估算等壁温情况下的平均传热系数是多少？

24. 某建筑物外墙面高 6m，接受到的太阳辐射热流量平均为 1 100 W/m²。假设通过墙壁的导热量为 95 W/m²。试估算墙壁外侧的温度是多少？建筑物外空气温度取为 20℃。

25. 假设一个人体可以近似看作直径为 30cm，高 2.0m 的圆柱。试估算周围环境温度为 20℃，表面温度 24℃时的自然对流热损失。

26. 标准状况下，当 $\Delta T=10$℃时，在空气中要是雷诺数等于 10^{12}，需要的竖直距离是多少？

27. 尺寸为 25cm×25cm 的竖直平板，装有电加热器，可产生 1 000 W/m² 的稳定热流。将其浸没在 15℃的水中。试计算表面对流换热系数以及平板表面的平均温度。在此平均温度下，等温表面散出的热量是多少？

28. 直径为 0.025 4mm 的细导线，被电流加热。将其水平放置在装有 3atm、10℃的氦气的房间中。如果导线表面温度不能超过 240℃，计算每单位长度导线通过的电能。

29. 直径为 3.5cm 的柱体，内有电加热源，可使柱体表面热流量维持在 1 500 W/m²。如果将柱体倾斜，使其与水平方向夹角 35°并暴露在 20℃的房间中，试估算柱体表面的平均温度。

30. 直径为 30cm 的水平管道，表面温度保持在 25℃，将其放置在空气温度 20℃的房间中。试计算每单位长度管道的自然对流热损失。

31. 有一热圆盘，直径为 15cm，温度为 150℃。周围空气温度为 20℃，计算当圆盘水平放置时的自然对流热损失。

32. 一些温度为 300K 的罐装商品被放入 275K 的冰箱中冷却。罐的直径和高度均为8.0 cm。试计算每个罐冷却中的放热量。大概要多长时间才能使罐的温度降至 290K？设罐内物品的物性与水相同。用集总参数法分析。

第 6 章　辐射换热的基础理论及计算

热辐射是热量传递的三种基本方式之一，在许多领域中具有重要应用。日常生活中也随处可见热辐射的例子。本章将首先从电磁辐射的观点来认识热辐射的本质及辐射能传递过程中的一些特性，包括电磁辐射与热辐射的传递特性；然后着重讨论辐射传热的基本定律；角系数与辐射换热的计算；掌握热辐射换热的基本研究方法；两黑体间的辐射换热；角系数的定义、性质和计算；被透明介质隔开的两固体表面间的辐射换热；多表面系统辐射换热的计算；辐射换热的强化与削弱及气体辐射。

6.1　辐射换热的理论基础

6.1.1　热辐射的基本概念

1. 热辐射

在绪论中已经介绍了热辐射的特点。辐射是电磁波传递能量的现象。热辐射是由热运动产生的电磁波辐射，是一种以电磁波形式传递热量的传热方式。

热辐射的电磁波是物体内部微观粒子的热运动状态改变时激发出来的，其显著特点是热辐射可以在真空中传播，并且具有强烈的方向性。只要物体的温度高于 0 K，就会不停地把热能变为辐射能，向周围空间发出热辐射；同时物体也不断地吸收周围物体投射到它上面的热辐射，并把吸收的辐射能重新转变成热能。故热辐射不同于导热和对流传热的另一显著特点是在热量传递过程中伴随着能量形式的转变。辐射换热则是指物体之间相互辐射和吸收的总效果。同时热辐射的辐射能与温度和波长均有关，物体发射辐射取决于温度的 4 次方。

热辐射具有一般辐射现象的共性。例如，热辐射的传播速度与其他电磁波辐射一样为光速。电磁波的传播速度、波长和频率存在如下关系：

$$c = f\lambda \tag{6-1}$$

式中：c——电磁波传播速度，在真空中 $c=3\times10^8$ m/s，在大气中的传播速度略低于此值；

f——频率，s^{-1}；

λ——波长，单位为 m，常用单位为 μm（微米），1μm$=10^{-6}$m。

电磁波的波长包括从零到无穷大的范围，整个波谱范围内的电磁波命名如图 6.1 所示。

其中可见光区段为 0.38～0.76μm，其热辐射能量的份额不大。而我们所感兴趣的，即工业上有实际意义的热辐射区域一般为 0.1～100μm，其大部分能量位于红外区段的 0.76～20μm 范围内。

各种波长的电磁波在科研、生产及日常生活中有着广泛的应用。例如波长在 1mm～1m 间的电磁波（即微波）可以穿过塑料、玻璃及陶瓷制品，但却会被像水那样具有极性分子的物体

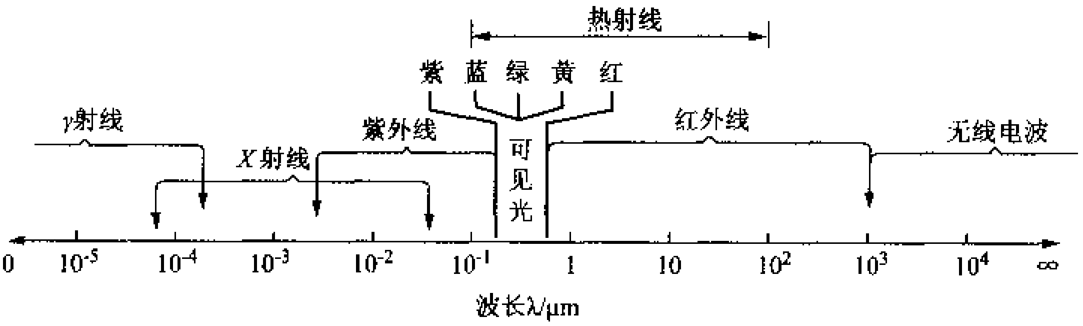


图 6.1 电磁波谱

吸收，在物体内部产生内热源，从而使物体比较均匀地得到加热。日常生活中常用的微波炉就是利用这一原理来加热物体的。波长大于 1m 的电磁波则广泛应用于无线电技术中。

2. 吸收比、反射比和透射比

当热辐射投射到物体表面上时，一般会发生三种现象，即吸收、反射、透射，如图 6.2 所示。在外界投射到物体表面上的总能量 Q 中，一部分 Q_α 被物体吸收，另一部分 Q_ρ 被物体反射，其余部分 Q_τ 透过物体。按照能量守恒定律有

$$Q = Q_\alpha + Q_\rho + Q_\tau \tag{6-2}$$

或

$$\frac{Q_\alpha}{Q} + \frac{Q_\rho}{Q} + \frac{Q_\tau}{Q} = 1 \tag{6-3}$$

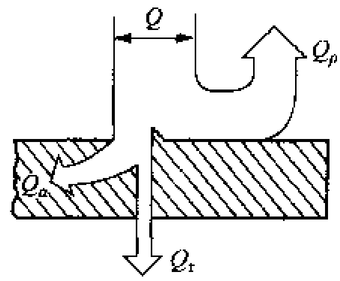


图 6.2 物体对热副射的吸收、反射和穿透

其中各能量百分数 Q_α/Q、Q_ρ/Q 和 Q_τ/Q 分别成为该物体对投入辐射的吸收比、反射比和透射比，记为 α、ρ 和 τ。于是有

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \tag{6-4}$$

对于大多数的固体和液体而言，辐射能进入表面之后，在一个极短的距离内就被吸收完了，因此可认为固体和液体不允许热辐射穿透，即 $\tau=0$。于是，对于固体和液体，式(6-4)简化为

$$\alpha + \rho = 1 \tag{6-5}$$

因而，就固体和液体而言，吸收能力大的物体其反射本领就小。反之，吸收能力小的物体其反射能力就大。

当辐射能投射到气体上时，由于气体对辐射能几乎没有反射能力，可认为反射比 $\rho=0$，而式(6-4)简化成

$$\alpha + \tau = 1 \tag{6-6}$$

显然，吸收性大的气体，其穿透性就差。

3. 镜面反射、漫反射；黑体、白体和透明体

辐射能投射到物体表面后的反射现象也和可见光一样，有镜面反射和漫反射的区分，这取决于表面不平整尺寸的大小，即表面的粗糙程度。当表面的不平整尺寸小于投入辐射的波长时，形成镜面反射，此时入射角等于反射角，如图 6.3 所示。当表面的不平整尺寸大于投入辐射的波长时，形成漫反射。这是从某一方向投射到物体表面上的辐射向空间各个方向反射出去，如图 6.4 所示。

自然界不同物体的吸收比、反射比和透射比因具体条件不同而千差万别，从而给热辐射的研究带来很大的困难。为此，人们从理想物体入手进行研究，把吸收比 $\alpha=1$ 的物体称为绝对

黑体(简称黑体);把反射比$\rho=1$的物体称为镜体或白体;把透射比$\tau=1$的物体称为绝对透明体(简称透明体)。显然,黑体、白体(镜体)和透明体都是假定的理想物体。

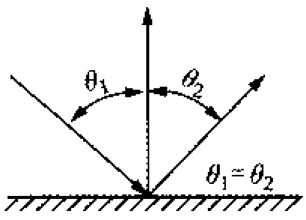


图 6.3 镜反射

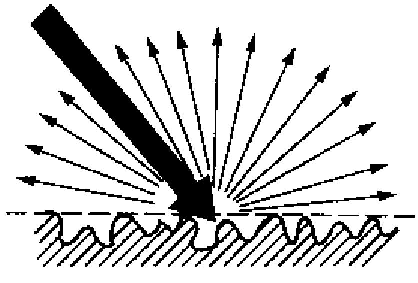


图 6.4 漫反射

4. 人工黑体概念

黑体是吸收比$\alpha=1$的物体,即黑体能吸收投入到其表面上的所有热辐射能,在相同温度的物体中,黑体的辐射能力最大。但它只是一种科学假想的物体,现实生活中并不存在。为了在研究黑体辐射的基础上,用修正系数的方法处理其他物体的问题,提出了黑体这样一个假想的概念。

人工黑体是人工制造出的近似黑体。选用吸收比小于 1 的材料制造成一个空腔,并在空腔壁面上开一个小孔,再设法使空腔壁面保持均匀的温度,这时空腔上的小孔就具有黑体辐射的特性。这种带有小孔的温度均匀的空腔就是一个黑体模型,如图 6.5 所示。由于通过小孔进入空腔的辐射能在空腔内要经历多次吸收和反射,最终从小孔反射出去的能量非常小,可以认为全部被吸收在空腔内部了。所以,就辐射特性而言,小孔具有黑体表面一样的性质。如小孔占内壁面积小于 0.6%,当内壁吸收比为 0.6 时,计算表明,小孔的吸收比可大于 0.996。

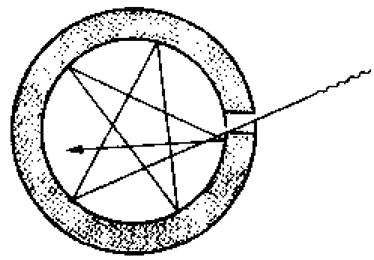


图 6.5 黑体模型

6.1.2 黑体辐射的基本概念与基本定律

本节重点讨论黑体辐射的三个基本定律,它们分别对黑体辐射的总能量及其按波长的分布、按空间方向的分布做了规定。

1. 辐出度 E 及光谱辐出度 E_λ

首先引入两个物理量表示物体向外界发射辐射能的数量,即辐出度 E 及光谱辐出度 E_λ。

辐出度:是单位时间内,物体的单位表面积向半球空间发射的全部波长的能量总和,单位为 W/m^2。辐出度从总体上表征物体发射辐射能本领的大小。

光谱辐出度 E_λ:是单位时间内,单位波长范围内(包含某一给定波长),物体的单位表面积向半球空间发射的能量,单位为 W/m^3。光谱辐出度 E_λ 按照波长范围描述物体发射辐射能的本领。

注意辐出度 E 及光谱辐出度 E_λ 两者的单位 W/m^2 和 W/m^3 的区别。显然,E 和 E_λ 之间具有如下关系:

$$E=\int_0^\infty E_\lambda d\lambda \tag{6-7}$$

在传热学中，凡属于黑体的一切量均以下标 b 表示，如黑体的辐出度为 E_b，黑体的光谱辐出度为 $E_{b\lambda}$。对于黑体来说辐射强度与辐射方向无关，并且 E_b 和 $E_{b\lambda}$ 同样具有如下关系

$$E_b = \int_0^{\infty} E_{b\lambda} \mathrm{d}\lambda \tag{6-8}$$

2. 黑体辐射的基本定律——普朗克(Planck)定律、斯忒藩-玻尔兹曼(Stefan-Boltzmann)定律和兰贝特(Lambert)定律

1) 普朗克定律

普朗克定律揭示了黑体辐射能按照波长的分布规律，即它给出了黑体光谱辐出度 $E_{b\lambda}$ 与波长和温度的依变关系。根据量子力学理论推导得到的普朗克定律的数学表达式如下：

$$E_{b\lambda} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/(\lambda T)} - 1} \tag{6-9}$$

式中：λ——波长，m；

T—— 黑体温度，K；

c_1——第一辐射常数，$3.742 \times 10^{-16}\ \mathrm{W \cdot m^2}$；

c_2——第二辐射常数，$1.4388 \times 10^{-2}\ \mathrm{m \cdot K}$。

如图 6.6 所示是根据上式描绘的黑体光谱辐出度随波长和温度的依变关系。曲线的峰值随着温度的升高移向较短的波长，即对应于单色辐出度峰值的 λ_m 与热力学温度 T 成反比关系，此即维恩(Wien)位移定律：

$$\lambda_m T = 2.8976 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K} \tag{6-10}$$

维恩定律发现在普朗克定律之前，但它可以通过将普朗克定律表达式对 λ 求导并使其为零求得。

实际物体的光谱辐出度按波长分布的规律与黑体的普朗克定律并不相同，但定性上是一致的。在高温测量技术中应用普朗克定律可以解释色温的现象。当金属温度低于 500℃时，由于没有可见光辐射，人们看不到颜色；随着温度的升高，热辐射移向较短的波长，金属将相继呈现暗红-亮红-橘红等颜色，直到 1 300℃时呈现白炽状态。金属在不同温度下呈现各种颜色说明随着温度的不断升高，可见光及可见光中短波的比例在不断增加。这种色温现象在工程中可用于判断被加热物体的温度，而无须安装测温元件。

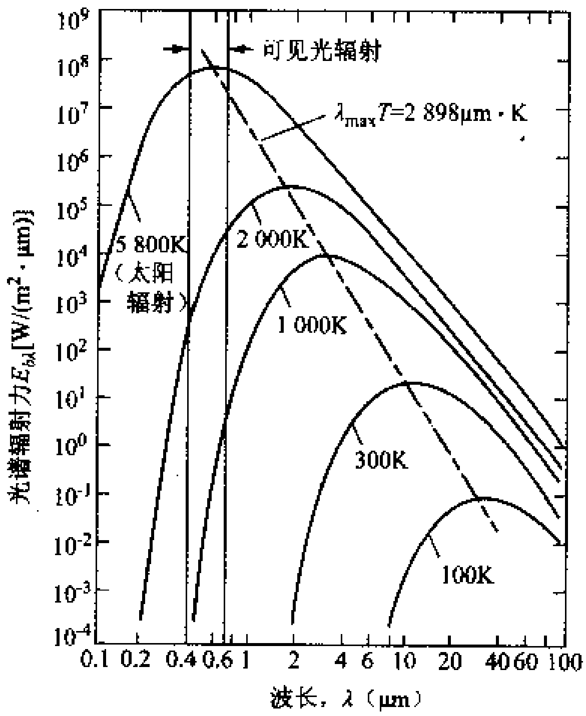


图 6.6　Planck 定律的图示

2) 斯忒藩-玻尔兹曼定律

将普朗克定律表达式代入式 $E_b = \int_0^{\infty} E_{b\lambda} \mathrm{d}\lambda$ 即得

$$E_b = \int_0^{\infty} E_{b\lambda} \mathrm{d}\lambda = \int_0^{\infty} \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/(\lambda T)} - 1} \mathrm{d}\lambda = \sigma T^4 \tag{6-11}$$

式中，$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}$，是斯忒藩-玻尔兹曼常数。

上式就是物理学上著名的斯忒藩-玻尔兹曼定律(又称四次方定律)，它说明黑体辐出度正比例

于热力学温度的四次方。

斯忒藩-玻尔兹曼定律表征在相应温度下黑体在全波长内总的辐出度。

为了高温时计算方便，改写上式为

$$E_b = C_b\left(\frac{T}{100}\right)^4 \text{W/m}^2 \tag{6-12}$$

式中，$C_b=5.67\text{W/(m}^2\cdot\text{K}^4)$，称为黑体辐射系数。

3）黑体辐射函数

针对实际问题，需要确定某一特定波长区段内的辐射能量。如黑体在波长 λ_1 和 λ_2 区段内所发射的辐射能

$$\Delta E_b = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda}\mathrm{d}\lambda \tag{6-13}$$

在图 6.7 中，这一能量可用在波长 λ_1 至 λ_2 之间有关温度曲线下的面积表示。通常把这个波段区间的辐射能表示成同温度下黑体总辐出度的百分数，记为 $F_{b(\lambda_1-\lambda_2)}$。于是

$$F_{b(\lambda_1-\lambda_2)} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda}\mathrm{d}\lambda}{\int_0^{\infty} E_{b\lambda}\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\sigma T^4}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda}\mathrm{d}\lambda$$

$$= \frac{1}{\sigma T^4}\left(\int_0^{\lambda_2} E_{b\lambda}\mathrm{d}\lambda - \int_0^{\lambda_1} E_{b\lambda}\mathrm{d}\lambda\right)$$

$$= F_{b(0-\lambda_2)} - F_{b(0-\lambda_1)} \tag{6-14}$$

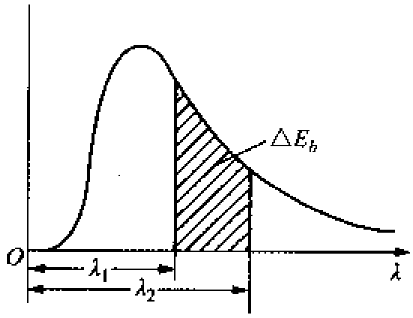


图 6.7 特定波长区段内的黑体辐射力

式中，$F_{b(0-\lambda_1)}$和 $F_{b(0-\lambda_2)}$分别为波长从 0 至 λ_1 和从 0 至 λ_2 的黑体辐射占同温度黑体辐出度的百分数。若将此能量份额 $F_{b(0-\lambda)}$表示为单一变量的函数，即为

$$F_{b(0-\lambda)} = \frac{\int_0^{\lambda} E_{b\lambda}\mathrm{d}\lambda}{\sigma T^4} = \int_0^{\lambda T}\frac{E_{b\lambda}}{\sigma T^4}\mathrm{d}(\lambda T) = f(\lambda T) \tag{6-15}$$

$f(\lambda T)$称为黑体辐射函数。

4）黑体辐射在空间的分布规律——兰贝特定律(Lambert)

(1) 立体角的概念。辐出度是指在单位时间内发射体单位表面积射向其对面半球空间的总能量，没有指明在半球空间不同方向上的能量分布。为了说明辐射能量在空间不同方向上的分布规律，必须在半球空间相同立体角的基础上进行比较才有意义，故在此首先讨论立体角的概念。

立体角是一空间角度，将球面面积除以球半径的平方即得立体角的量度：

$$\Omega = \frac{A_c}{r^2} \tag{6-16}$$

立体角的单位为 sr(球面度)。参看图 6.8 和 6.9，若取整个半球的面积为 A_c，则得立体角为 2πsr；若取微元面积 $\mathrm{d}A_c$ 为切割面积，则得微元立体角

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}A_c}{r^2} = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{6-17}$$

式中 $\mathrm{d}\varphi$，$\mathrm{d}\theta$ 分别为图 6.8 中的径度微元角和纬度微元角。

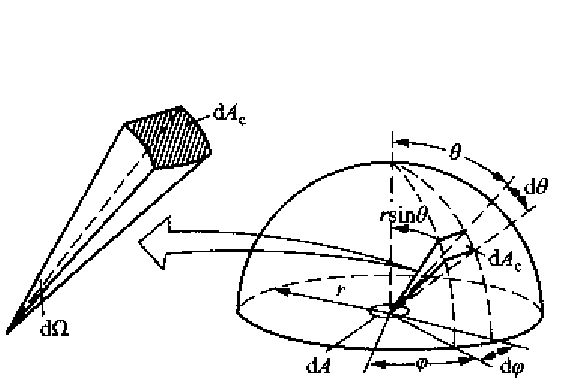


图 6.8　立体角定义图

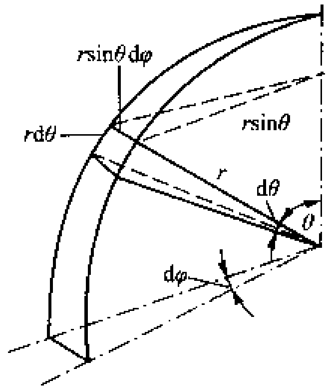


图 6.9　计算微元立体角的几何关系

(2) 定向辐射度 $L(\theta,\varphi)$。单位时间内，物体在垂直发射方向的单位面积上，在单位立体角内发射的一切波长的能量称为定向辐射度，记为 L，参见图 6.10。定向辐射度 $L(\theta,\varphi)$ 为

$$L(\theta,\varphi)=\frac{\mathrm{d}\Phi(\theta,\varphi)}{\mathrm{d}A\cos\theta\mathrm{d}\Omega}$$

定向辐射度的单位是 $\mathrm{W/(m^2\cdot sr)}$。

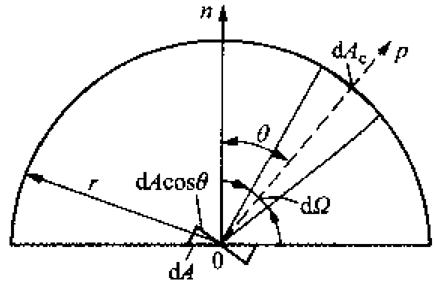


图 6.10　定向辐射度的定义图

(3) 兰贝特定律。黑体辐射的定向辐射度与方向无关，也就是说，在半球空间的各个方向上的定向辐射度相等：

$$L(\theta,\varphi)=L=\text{常量}$$

定向辐射度与方向无关的规律称为兰贝特(Lambert)定律。黑体辐射是符合兰贝特定律的。对于服从兰贝特定律的辐射，有

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(\theta,\varphi)}{\mathrm{d}A\mathrm{d}\Omega}=L\cos\theta \tag{6-18}$$

上式说明，黑体的定向辐出度随天顶角 θ 呈余弦规律变化，如图 6.11 所示。因此，兰贝特(Lambert)定律也称为余弦定律。余弦定律表明，黑体辐射在空间不同方向的分布是不均匀的，法线方向最大，切线方向为零。

沿半球方向积分上式，可获得半球辐射度 E：

$$E=\int_{\Omega=2\pi}L\cos\theta\mathrm{d}\Omega=L\pi \tag{6-19}$$

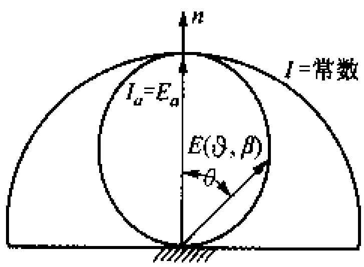


图 6.11　Lambert 定律图示

式(6-19)表明，遵守兰贝特定律的辐射，数值上其辐出度等于定向辐射度的 π 倍。根据上述论述可将黑体辐射的规律性归纳如下：斯忒藩-玻尔兹曼定律给出了黑体的一切波长下的总辐出度，辐出度正比于绝对温度的四次方；普朗克定律给出黑体在特定波长下的辐出度，即黑体辐射能量按波长不同而变化；兰贝特定律则描述了辐射能量按空间方向分布的规律；黑体的单色辐出度具有峰值，维恩位移定律确定出 λ_m 与 T 的关系，即随着温度的升高，λ_m 向波长短的方向移动。

6.1.3　实际物体的辐射特性

1) 实际物体的辐射

实际物体(固体和液体)与理想黑体的辐射特性之差别在于实际物体的光谱辐出度往往随

波长作不规则的变化。为此，对应于黑体的辐出度 E_b、光谱辐出度 $E_{b\lambda}$ 和定向辐射度 L、分别引入了三个修正系数，即：

发射率 ε(黑度)表示实际物体与同温度下黑体辐出度的比值，即

$$\varepsilon = \frac{E}{E_b} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon(\lambda) E_{b\lambda} \mathrm{d}\lambda}{\sigma T^4} \tag{6-20}$$

光谱发射率 $\varepsilon(\lambda)$(单色黑度)表示实际物体的光谱辐出度 E_λ 与同温度下黑体光谱辐出度 $E_{b\lambda}$ 的比值，即

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{E_\lambda}{E_{b\lambda}} \tag{6-21}$$

定向发射率 $\varepsilon(\theta)$(定向黑度)表示实际物体的定向辐射度与同温度下黑体的定向辐射度之比，即

$$\varepsilon(\theta) = \frac{L(\theta)}{L_b(\theta)} = \frac{L(\theta)}{L_b} \tag{6-22}$$

2) 灰体与实际物体的辐射特性

灰体也是一种理想的物体。在热辐射分析中，把光谱吸收比与波长无关的物体称为灰体。它与黑体的区别在于其吸收率小于 1，但灰体遵守黑体所遵循的有关辐射规律。如图 6.12 中虚线所示。对于灰体在一定温度下有

$$\alpha = \alpha(\lambda) = \text{常数}$$

工业上通常遇到的热辐射主要波长区段位于红外线范围内，在此范围内把大多数工程材料当作灰体处理引起的误差可以允许，而这种简化处理却给辐射换热分析带来很大的方便。

实际物体、黑体和灰体的不同之处可归纳为：第一，实际物体的辐出度与黑体和灰体的辐出度的差别，如图 6.12 所示；第二，实际物体的辐出度并不完全与热力学温度的四次方成正比；第三，实际物体的定向辐射度也不严格遵守兰贝特定律等。因而，实际物体的辐射特性在定性上与黑体相似，但定量上则比较复杂，一般需要实验来确定。图 6.13，6.14 给出了一些材料的定向发射率 $\varepsilon(\theta)$。

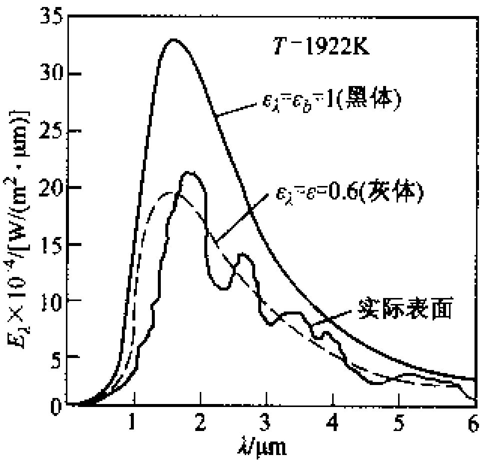


图 6.12　实际物体、黑体和灰体的辐射能量光谱

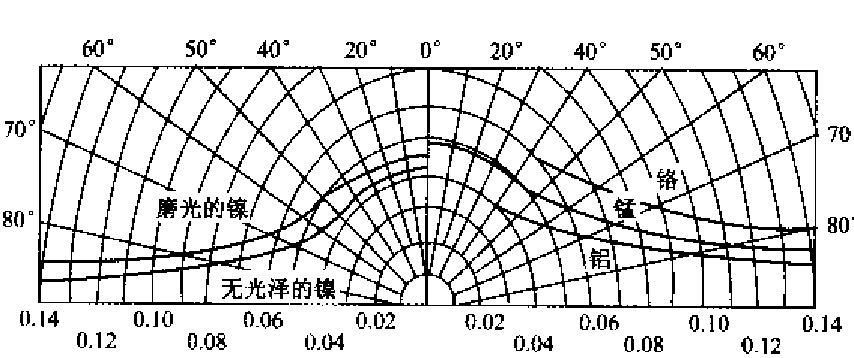


图 6.13　几种金属导体在不同方向上的定向发射率 $\varepsilon(\theta)$ ($t=150$℃)

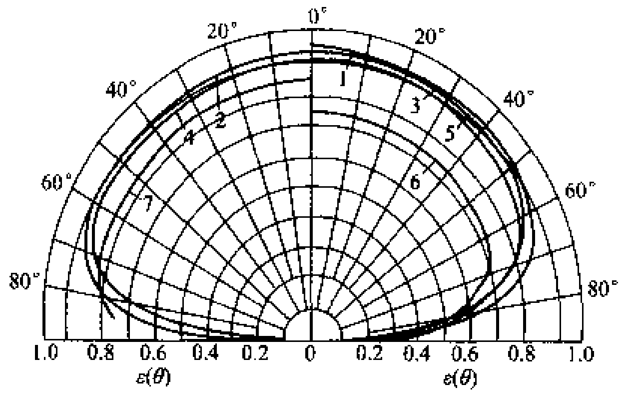


图 6.14 几种非导电体材料在不同方向上的定向发射率 $\varepsilon(\theta)$（t=0～93.3℃）

1-潮湿的冰；2-木材；3-玻璃；4-纸；5-粘土；6-氧化铜；7-氧化铝

应该注意的是：第一，将不确定因素归于修正系数，这是由于热辐射非常复杂，难以从理论上加以确定，实际上是一种权宜之计；第二，虽然实际物体的定向发射率并不完全符合兰贝特定律，但仍然近似地认为大多数工程材料服从兰贝特定律；第三，发射率只与发射辐射的物体本身有关，而不涉及外界条件。

6.1.4 实际物体的吸收比和基尔霍夫定律

本节讨论实际物体的吸收特性、吸收比与发射率之间的关系。

1. 投入辐射

单位时间内从外界辐射到物体单位表面积上的能量称为该物体的投入辐射。物体对投入辐射所吸收的百分数称为该物体的吸收比

$$\alpha=\frac{\text{吸收的能量}}{\text{投入的能量(投入辐射)}}$$

实际物体的吸收比 α 取决于两方面的因素：吸收物体的本身情况（物质的种类、表面温度和表面状况）和投入辐射的特性。由于投入辐射本身具有光谱特性，因此，实际物体对投入辐射的吸收能力也根据其波长的不同而变化，这称为选择性吸收。一般采用灰体法或谱带模型法处理选择性吸收特性。

2. 光谱吸收比（单色吸收比）

物体对某一特定波长的辐射能所吸收的百分数称为光谱吸收比，也叫单色吸收比，记为$\alpha(\lambda)$。

$$\alpha(\lambda,T_1)=\frac{\text{吸收的某一特定波长的能量}}{\text{投入的某一特定波长的能量}}$$

如图 6.15 和 6.16 所示分别给出了室温下几种材料的光谱吸收比同波长的关系。

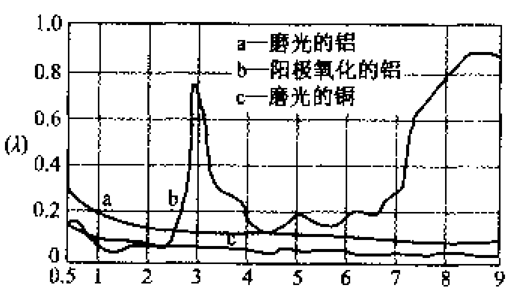


图 6.15 金属导电体的光谱吸收比同波长的关系

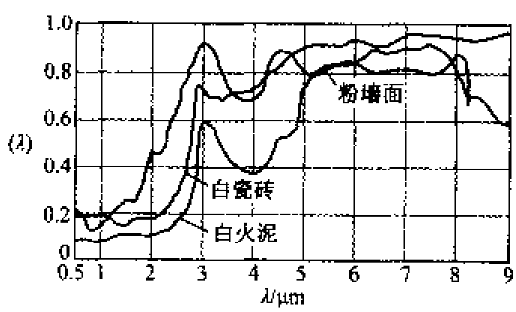


图 6.16 非导电体材料的光谱吸收比同波长的关系

物体的吸收比除与自身表面的性质和温度(T_1)有关外,还与投入辐射按波长的能量分布有关。投入辐射按波长的能量分布又取决于发出投入辐射的物体的性质和温度(T_2)。因此,物体的吸收比要根据吸收一方和发出投入辐射的一方两方的性质和温度来确定。设下标 1,2 分别代表所研究的物体及产生投入辐射的物体,则物体 1 的吸收比的数学表达式为

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^{\infty} \alpha(\lambda, T_1)\varepsilon(\lambda, T_2)E_{b\lambda}(T_2)d\lambda}{\int_0^{\infty} \varepsilon(\lambda, T_2)E_{b\lambda}(T_2)d\lambda} \tag{6-23}$$

$$= f(T_1, T_2, \text{表面 1 的性质}, \text{表面 2 的性质})$$

如果投入辐射来自黑体,由于 $\varepsilon_b(\lambda, T_2)=1$,则

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^{\infty} \alpha(\lambda, T_1)E_{b\lambda}(T_2)d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{b\lambda}(T_2)d\lambda}$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} \alpha(\lambda, T_1)E_{b\lambda}(T_2)d\lambda}{\sigma T_2^4} \tag{6-24}$$

$$= f(T_1, T_2, \text{表面数的性质})$$

对一定的物体,其对黑体辐射的吸收比是温度 T_1,T_2 的函数。图 6.17 绘出了一些材料对黑体辐射的吸收比。

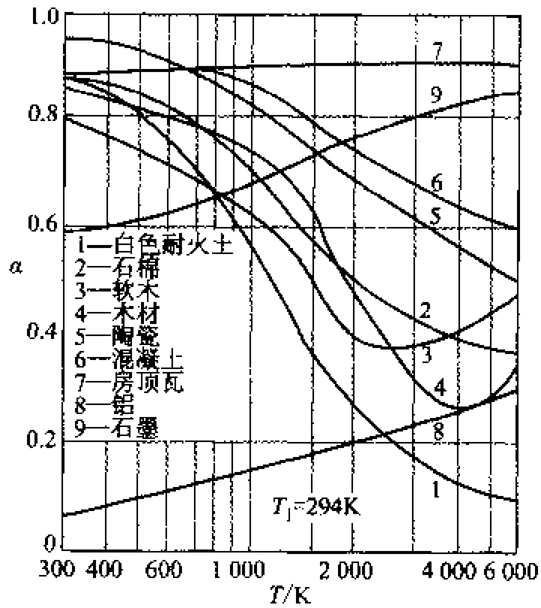


图 6.17 物体表面对黑体辐射的吸收比与温度的关系

实际物体的吸收比与投入辐射有关的特性给工程辐射换热的计算带来很大不便。为了使计算时能将物体的光谱吸收比看作与波长无关,从而使吸收比在不同的投入辐射分布下始终为常数,引入了上述灰体的概念。

3. 基尔霍夫(Kirchhoff)定律

1849 年,基尔霍夫(G. R. Kirchhoff,德国物理学家,1824—1887)归纳提出实际物体的辐射和吸收之间的相对关系,即基尔霍夫定律。基尔霍夫定律的数学表达式是

$$aE_b = E \Rightarrow \alpha = \frac{E}{E_b} = \varepsilon$$

该式说明,在热力学平衡状态下,物体的吸收比等于它的发射率。

基尔霍夫定律揭示了实际物体的发射辐射能的能力与它的吸收能力的相对关系,可以从研究两个表面的辐射换热导出。在推导时做如下限制:

1) 如物体的吸收比与发射率、温度有关,只有两者处于同一温度下的值才能相等;

2) 整个系统处于热平衡状态;

3) 投射辐射源必须是同温度下的黑体。

关于基尔霍夫定律需要说明以下几点。

① 基尔霍夫定律在实际工程应用中,按照多种适用条件,形成如表 6.1 所示的该定律不同层次上的表达式。但对大多数工程计算,主要应用其中“全波段、半球”层次上的表达式。

表 6.1　Kirchhoff 定律的不同表达式

层　次	数学表达式	成立条件
光谱，定向	$\varepsilon(\lambda,T)=\alpha(\lambda,T)$	无条件，θ 为天顶角
光谱，半球	$\varepsilon(\lambda,T)=\alpha(\lambda,T)$	漫射表面
全波段，半球	$\varepsilon(T)=\alpha(T)$	与黑体处于热平衡或对漫灰表面

② 漫射表面指发射或反射的定向辐射度与空间方向无关，即符合 Lambert 定律的物体表面；

③ 由于在大多数条件下物体可按灰体处理，即物体的光谱吸收比与波长无关，其发射和吸收辐射与黑体在形式上完全一样，只是减小了一个相同的比例。故根据基尔霍夫定律可知，物体的辐出度越大，其吸收能力也越大，即善于辐射的物体必善于吸收，反之亦然。同温度下，黑体的辐出度最大。

④ 当研究物体表面对太阳能的吸收时，一般不能把物体作为灰体。这是由于太阳辐射中可见光占了近一半，而大多数物体对可见光波的吸收表现出强烈的选择性。如各种颜色的油漆常温下发射率高达 0.9，但在可见光范围内白漆的吸收比仅 0.1～0.2，而黑漆的吸收比仍为 0.9。这就是夏天穿白色衣服的理由。

6.2　辐射换热的计算

上一节介绍了辐射换热的基本概念和基本定律。本节讨论物体间辐射换热的计算方法。首先讨论两黑体表面间的辐射换热，以及在进行计算时必须要用到的一个重要几何因子——角系数的定义、性质及其计算；最后介绍由两个表面及多个表面所组成系统的辐射换热计算方法，在此基础上总结辐射换热的强化及削弱的方法。

6.2.1　两黑体表面间的辐射换热

应用斯忒藩-玻尔兹曼定律进行黑体表面间的辐射换热计算时，其主要复杂性在于角系数。由于角系数纯属几何因子，讨论中导出的角系数及其性质对黑体辐射及非黑体辐射都是适用的。另外，基于表面向位于其上方的半球空间辐射的特性，一般来说，任何一个表面与其他表面的辐射换热，不能仅仅考虑两个表面间的作用，还要同时考虑全部有关表面的作用。实际上，总可以把参与辐射的有关表面围成一个封闭的空腔。即使表面间有不封闭的开口，也可以把开口设想为一个或多个假想面，从而围成一个封闭腔。这就是物体间辐射换热计算所必须遵循的基本方法，称为空腔法。本节的命题是空腔法的一个特例。由于假想面也是黑体，完全吸收投来的辐射，所以可以不计假想面的作用，把注意力集中到两个黑体间的辐射换热上去。

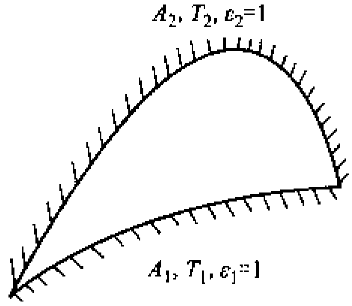


图 6.18　黑体系统的辐射换热

图 6.18 是一个简单的黑体系统的辐射换热图。这两个表面已经组成一个封闭的空腔。并且假定两个表面面积分别为 A_1 和 A_2，分别维持恒温 T_1 和 T_2，由于是黑体，因此 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$，表面之间的介质对热辐射是透明的。每个表面发射出的能量都只能全部到达

另一个表面。如果两个表面并未封闭，则每个表面发射出的能量只有一部分可以到达另一个表面，其余部分则落在开口假想面上。我们把表面 1 发射出的辐射能 Q_1 落到表面 2 上的百分数称为表面 1 对表面 2 的角系数，记为 $X_{1,2}$；反之，记为 $X_{2,1}$。落在黑体表面上的能量被全部吸收，所以两个表面间的辐射换热量 $Q_{1,2}$ 为

$$Q_{1,2} = A_1 E_{b1} X_{1,2} - A_2 E_{b2} X_{2,1} \quad (6-25)$$

用净换热量 $Q_{1,2}$ 表示，则角系数 $X_{1,2}=\frac{Q_{1,2}}{Q_1}$。当 $T_1=T_2$ 时，$Q_{1,2}=0$，于是 $E_{b1}=E_{b2}$。由此可从上式推得

$$A_1 X_{1,2} = A_2 X_{2,1} \quad (6-26)$$

此式表示两个表面在辐射换热时角系数的相对性。上式的关系不受温度条件的约束，因此角系数纯属几何因子，仅取决于几何特性（形状、尺寸及物体的相对位置），故式(6-26)在换热条件下仍然适用。此时两黑体辐射换热计算公式为

$$Q_{1,2} = A_1 X_{1,2}(E_{b_1} - E_{b2}) = A_2 X_{2,1}(E_{b1} - E_{b2}) \quad (6-27)$$

式中，黑体辐出度均由斯忒藩-玻尔兹曼定律确定，角系数 $X_{1,2}$ 和 $X_{2,1}$ 的定义及确定方法将在下节讨论。

6.2.2 角系数

在介绍角系数概念前，先定义两个概念：定义投入辐射是指单位时间内投射到单位面积上的总辐射能，记为 G；定义有效辐射是指单位时间内离开单位面积的总辐射能，记为 J，参见图6.19。J 包括了自身的发射辐射 E 和反射辐射 ρG，G 为投射辐射，ρ 为表面的反射比。

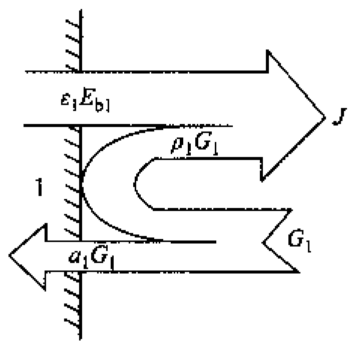


图 6.19 有效辐射示意图

在讨论角系数时假定：所研究的表面是漫射的；在所研究的表面的不同地点上向外发射的辐射热流密度是均匀的。在这两个假定下，物体的表面温度及发射率的改变只影响到该物体向外发射的辐射能大小，而不影响在空间的相对分布，因而不影响辐射能落到其他表面上的百分数。

1. 角系数的定义

表面 1 发射出的辐射能 Q_1 落到表面 2 上的百分数称为表面 1 对表面 2 的角系数，记为 $X_{1,2}$；反之，记为 $X_{2,1}$。即

$$X_{1,2}=\frac{\text{表面 1 对表面 2 的投入辐射}}{\text{表面 1 的有效辐射}}$$

根据假定角系数只对漫射表面（既漫辐射又称漫发射）的发射辐射和投射辐射均匀的情况下适用。

2. 角系数的计算

1）微元面对微元面的角系数

如图 6.20 所示，黑体微元面 dA_1 对微元面 dA_2 的角系数记为 $X_{d1,d2}$，则根据前面的定义式有

$$X_{d1,d2} = \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\pi r^2} dA_2 \quad (6-28a)$$

$$X_{d2,d1}=\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\pi r^2}\mathrm{d}A_1 \tag{6-28b}$$

2）微元面对面的角系数

由角系数的定义可知，微元面 $\mathrm{d}A_1$ 对面 A_2 的角系数为

$$X_{d1,2}=\int_{A_2}\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\pi r^2}\mathrm{d}A_2 \tag{6-29a}$$

$$X_{2,d1}=\int_{A_1}X_{d2,d1}\mathrm{d}A_1 \tag{6-29b}$$

3）面对面的角系数

面 A_1 对面 A_2 的角系数 $X_{1,2}$ 以及面 A_2 对面 A_1 的角系数 $X_{2,1}$ 分别为

$$X_{1,2}=\frac{1}{A_1}\int_{A_1}X_{d1,2}\mathrm{d}A_1 \tag{6-30a}$$

$$X_{2,1}=\frac{1}{A_2}\int_{A_2}X_{d2,1}\mathrm{d}A_2 \tag{6-30b}$$

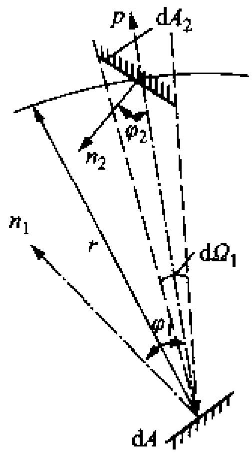


图 6.20 两微元面间的辐射

3. 角系数的性质

1）角系数的相对性

由式(6-28a)和式(6-28b)可以看出

$$X_{d1,d2}=\frac{L_{b_1}\cos\varphi_1\mathrm{d}A_1\mathrm{d}\Omega}{E_{b_1}\mathrm{d}A_1}=\frac{\mathrm{d}A_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\pi r^2}$$

类似的有

$$X_{d2,d1}=\frac{\mathrm{d}A_1\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\pi r^2}$$

由此可见

$$\mathrm{d}A_1X_{d1,d2}=\mathrm{d}A_2X_{d2,d1} \tag{6-31}$$

这是两微元表面间角系数相对性的表达式，它表明 $X_{d1,d2}$ 和 $X_{d2,d1}$ 不是独立的，它们受式(6-31)的制约。

两有限大小表面 A_1 和 A_2 间角系数相对性可以通过分析两黑体表面间的辐射换热量而获得。两个表面间的换热量见式(6-25)，为

$$Q_{12}=A_1E_{b_1}X_{1,2}-A_2E_{b_2}X_{2,1}$$

当 $T_1=T_2$ 时，净辐射换热量为零，则有

$$A_1X_{1,2}=A_2X_{2,1} \tag{6-32}$$

这是两有限大小表面间角系数的相对性的表达式。

2）角系数的完整性

对于有 n 个表面组成的封闭系统，如图 6.21 所示，据能量守恒原理，以表面 1 为例，可得：

$$X_{1,1}+X_{1,2}+X_{1,3}+\cdots+X_{1,n}=\sum_{i=1}^{n}X_{1,i}=1 \tag{6-33}$$

此式表达的关系成为角系数的完整性。若表面 1 为非凹表面时，$X_{1,1}=0$。若表面 1 为图中虚线所示的凹表面，则表面 1 对自己本身的角系数 $X_{1,1}$ 不是零。

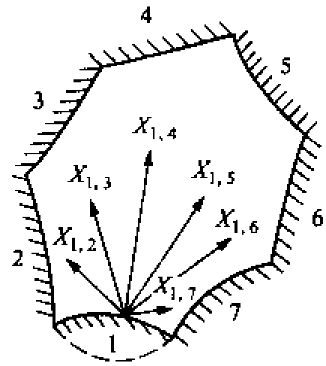


图 6.21 角系数的完整性

3) 角系数的可加性

考虑如图 6.22 所示表面 1 对表面 2 的角系数。由于从表面 1 发出而落到表面 2 上的总能量，等于落到表面 2 上各部分的辐射能之和于是有

$$A_1 E_{b1} X_{1,2} = A_1 E_{b1} X_{1,2a} + A_1 E_{b1} X_{1,2b}$$

故有

$$X_{1,2} = X_{1,2a} + X_{1,2b}$$

如把表面 2 进一步分成若干小块，则仍有

$$X_{1,2} = \sum_{i=1}^{n} x_{1,2i} \tag{6-34}$$

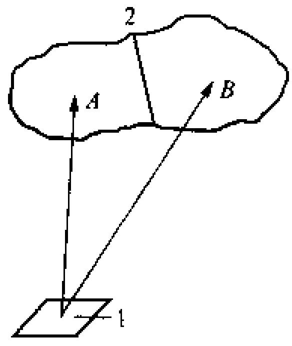


图 6.22 角系数的可加性

值得注意的是，上图中的表面 2 对表面 1 的角系数不存在上述的可加性。也就是说，在利用角系数的可加性时，只有对角系数符号中第二个下标是可加的，对角系数符号中的第一个下标则不存在类似于式(6-34) 这样的关系。

4. 求解角系数的代数分析法

求解角系数的方法通常有直接积分法、代数分析法、几何分析法以及 Monte-Carlo 法。直接积分法的结果见公式(6-29)～(6-31)。本节重点讨论代数分析法。

代数分析法是利用角系数的相对性、完整性和可加性，通过对代数方程求解而获得角系数的方法。下面，先利用此法导出三个表面组成的封闭系统的角系数计算公式，然后进一步得出任意两个二维表面间角系数的交叉线法。

对图 6.23 所示几何系统进行分析。假定图示系统在垂直于纸面方向是很长的，因而近似的认为它是个封闭系统。已知三个非凹表面面积分别为 A_1，A_2 和 A_3，则根据角系数的相对性和完整性有

$$X_{1,2} + X_{1,3} = 1$$
$$X_{2,1} + X_{2,3} = 1$$
$$X_{3,1} + X_{3,2} = 1$$
$$A_1 X_{1,2} = A_2 X_{2,1}$$
$$A_1 X_{1,3} = A_3 X_{3,1}$$
$$A_2 X_{2,3} = A_3 X_{3,2}$$

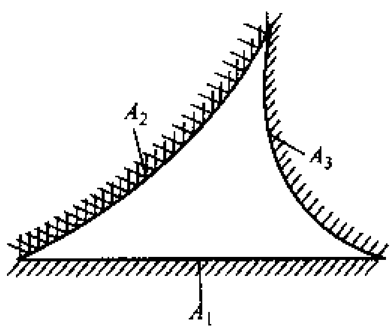


图 6.23 三个非凹表面组成的封闭系统

这是一个六元一次联立方程组，求解这个封闭的方程组，可得所有角系数，如 $X_{1,2}$ 为

$$X_{1,2} = \frac{A_1 + A_2 - A_3}{2A_1} \tag{6-35a}$$

其他各个角系数的式子也可以仿照 $X_{1,2}$ 的模式求出。因为在垂直于纸面的方向上三个表面的长度是相同的，所以在式(6-35a)中可以从分子、分母中消去。若系统横截面上三个表面的长度分别为 l_1，l_2 和 l_3，则式(6-35a)可写为

$$X_{1,2} = \frac{l_1 + l_2 - l_3}{2l_1} \tag{6-35b}$$

下面应用代数分析法来确定如图 6.24 所示的表面 A_1 和 A_2 之间的角系数。假定在垂直于纸面的方向上表面的长度是无限延伸的。做辅助线 ac 和 bd，它们代表在垂直于纸面的方

向上无限延伸的两个表面。可以认为它们连同表面 A_1，A_2 构成一个封闭系统。在这个系统里，根据角系数的完整性，表面 A_1 对角 A_2 的系数为

$$X_{ab,cd}=1-X_{ab,ac}-X_{ab,bd}$$

同时，也可以把图形 abc 和 abd 看成两个各有三个表面组成的封闭系统。对这两个系统直接应用式(6-35b)，可写出两个角系数的表达式

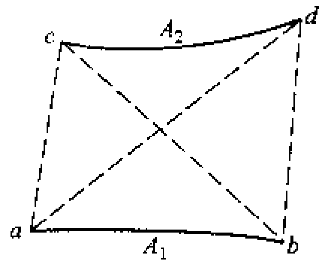


图 6.24　两个非凹表面及假想面组成的封闭系统

$$X_{ab,ac}=\frac{ab+ac-bc}{2ab}$$

$$X_{ab,bd}=\frac{ab+bd-ad}{2ab}$$

解上述方程组得

$$X_{ab,cd}=\frac{(bc+ad)-(ac+bd)}{2ab}=\frac{\text{交叉线之和}-\text{不交叉线之和}}{2\times\text{表面}A_1\text{的断面长度}} \tag{6-36}$$

对于在一个方向长度上无限延伸的多个表面组成的系统，任意两个表面之间的角系数的计算式，都可参照式(6-36)的结构关系写出，故该方法又被称为交叉线法。

一些常见的典型几何系统的角系数都已计算出来，并已绘成图表供实际工程计算用。图 6.25 为互相垂直的两长方形表面间的角系数线算图；图 6.26 为互相平行的两长方形表面间的角系数线算图；图 6.27 为互相平行的两同心圆表面间的角系数线算图。工程上还有更详细的有关手册供查阅。

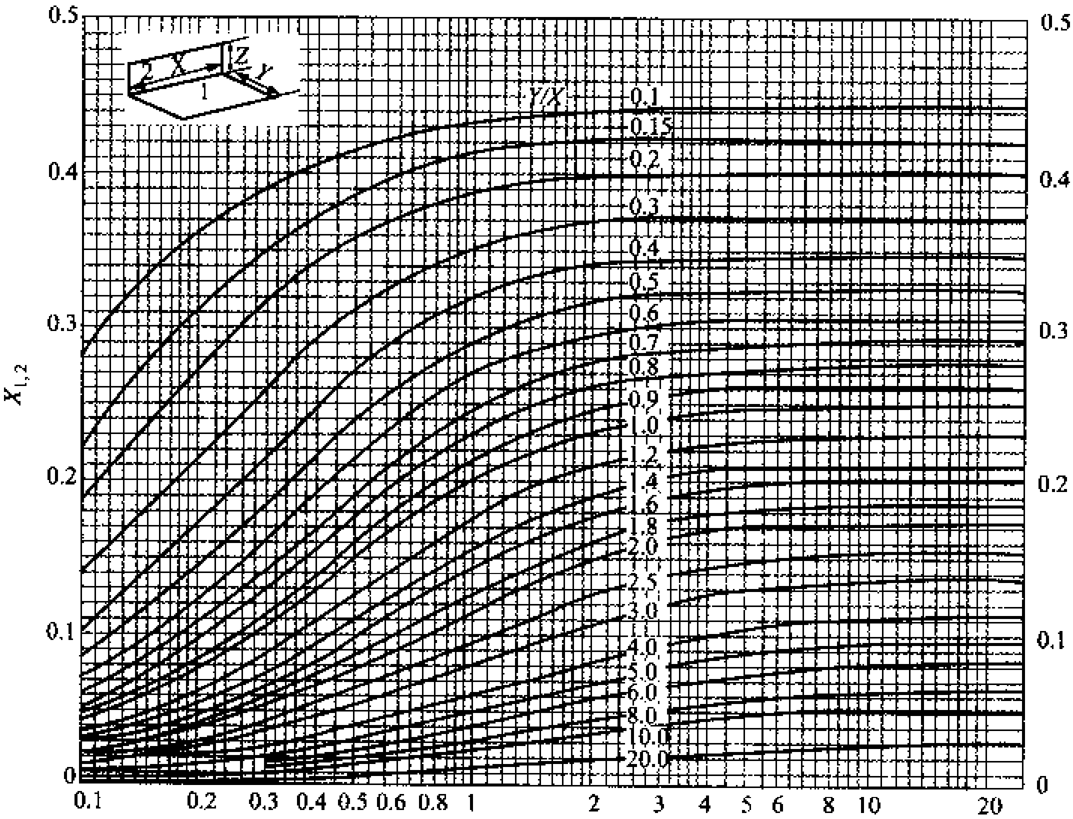


图 6.25　相互垂直的两长方形表面间的角系数

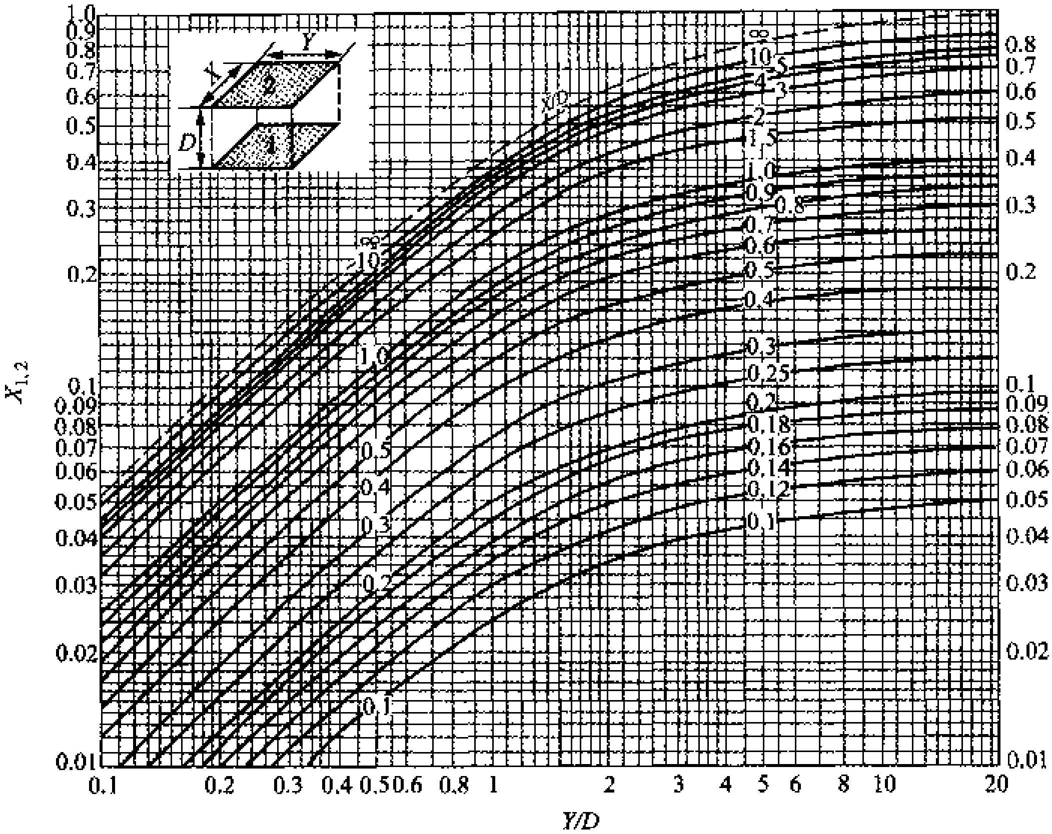


图 6.26 平行长方形表面间的表面系数

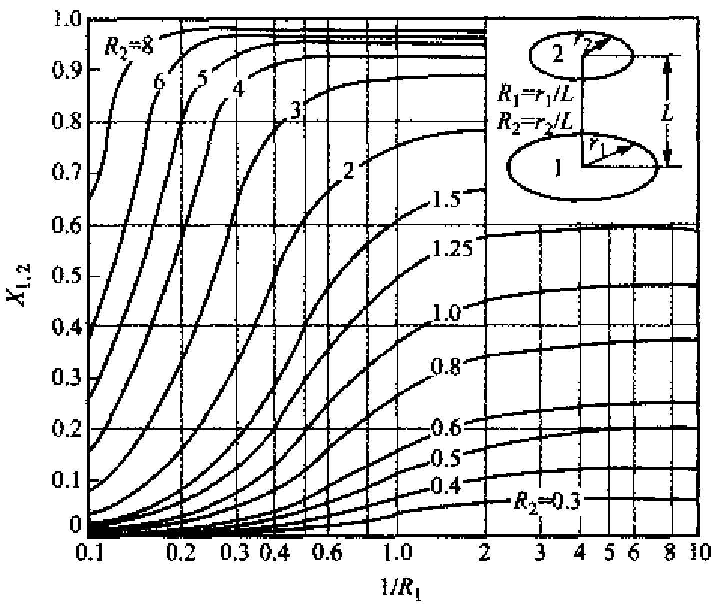


图 6.27 平行的同心圆形表面间的角系数

例 6-1 角系数线图应用

已知:两个平行的黑体平板,大小为 0.5m×1.0m,两平板之间的距离为 0.5m。其中的一块平板保持温度为 1000℃不变,另一块则保持 500℃。试问两平板间的净辐射换热量是多少?

解:利用图 6.26 可查出两平板之间的角系数

$$\frac{Y}{D}=\frac{0.5}{0.5}=1 \qquad \frac{X}{D}=\frac{1.0}{0.5}=2$$

因此两平板间的角系数为 $F_{1,2}=0.285$，则净换热量可由下式计算得出

$$\begin{aligned} q &= A_1F_{1,2}(E_{b1}-E_{b2}) = \sigma A_1F_{1,2}(T_1^4-T_2^4) \\ &= (5.67\times10^{-8})\times0.5\times0.285\times(1\,273^4-773^4) \\ &= 18.33\text{kW} \end{aligned}$$

6.2.3 多表面系统辐射换热的计算

灰体表面对投入的辐射只能部分的吸收，其余部分则反射出去。由于这个缘故，灰体间的辐射换热比黑体间的辐射换热更加复杂，它存在着灰体表面间多次反射、吸收的现象。为使分析和计算得到简化，使用前面提到的有效辐射的概念，对多次的反射、吸收现象采用算总账的方法。

如图 6.19 所示，考察表面温度均匀、表面辐射换热特征为常数的表面 1。根据有效辐射的定义，表面 1 的有效辐射 J_1 为

$$J_1 = E_1+\rho_1G_1 = \varepsilon_1E_{b_1}+(1-\alpha)G_1 \tag{6-37}$$

两个灰体间的辐射换热可表示成

$$Q_{12} = A_1X_{1,2}(J_1-J_2) \tag{6-38}$$

通过热网络法，即应用电学中的电流、电位差和电阻比拟热辐射中的热流、热势差与热阻，用电路来比拟辐射热流的传递路径的方法，式(6-38)可以改写为

$$Q_{12} = \frac{J_1-J_2}{\dfrac{1}{A_1X_{1,2}}} \tag{6-39}$$

式中，J_1-J_2 对应于电路两端的电位差，而$\dfrac{1}{A_1X_{1,2}}$是辐射换热的热阻，它对应于电路中的电阻。这个热阻仅仅取决于空间参量而与表面辐射特性无关，称为空间辐射热阻，如图 6.28 所示。

对灰体，由于发射率小于 1，除辐射空间热阻外，还有表面热阻，如图 6.29 所示。表面 1 单位面积失去的净热量为

$$\frac{Q_1}{A_1}=J_1-G_1$$

利用此式与式(6-37)消去 G_1，注意到对灰体 $\alpha_1=\varepsilon_1$，可得

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_1A_1}{1-\varepsilon_1}(E_{b1}-J_1) = \frac{E_{b1}-J_1}{(1-\varepsilon_1)/(\varepsilon_1A_1)} \tag{6-40}$$

式中，$E_{b1}-J_1$ 称为表面热势差；$(1-\varepsilon_1)/(\varepsilon_1A_1)$则被称为表面辐射热阻。可见，每一个表面都有一个表面辐射热阻；表面发射率越大，越接近黑体，则表面热阻越小。

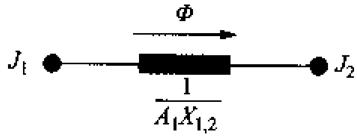


图 6.28 空间辐射热阻

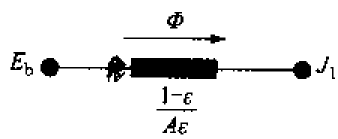


图 6.29 表面辐射热阻

网络法的应用举例

1）两漫灰表面

参见图 6.30，其等效网络图如图 6.31 所示，根据电路中的基尔霍夫定律，列出节点的热流方程，见下式：

$$J_1:\ \frac{E_{b1}-J_1}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1}}+\frac{J_2-J_1}{\dfrac{1}{A_1X_{1,2}}}=0$$

$$J_2:\ \frac{E_{b2}-J_2}{\dfrac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}}+\frac{J_1-J_2}{\dfrac{1}{A_1X_{1,2}}}=0$$

求解上面的方程组得 J_1 或者 J_2，然后，根据 $\Phi_i=\dfrac{E_{bi}-J_i}{\dfrac{1-\varepsilon_i}{A_i\varepsilon_i}}$ 计算净辐射热流，其中 i 代表表面 1 或表面 2。

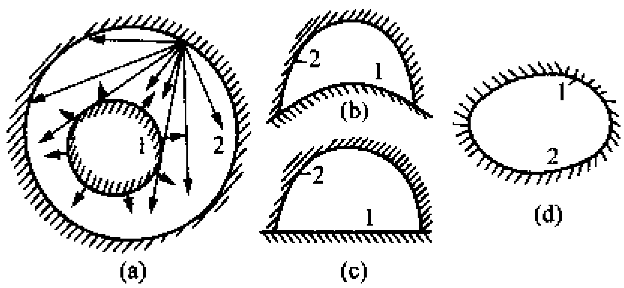


图 6.30　两个物体组成的辐射换热系统

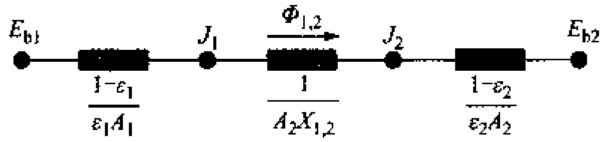


图 6.31　两表面封闭系统辐射换热等效网络图

两个灰体间的辐射换热有三种换热情况：第一，表面 1 对表面 2 的角系数为 1；第二，A_1/A_2 近似为 1（平行板间）；第三，A_1/A_2 近似为 0（大空间与小工件之间）。

2）三个表面

如图 6.32 所示，是由三个表面组成的热辐射网络。与两个表面相似，等效网络如图 6.33 所示，列出各节点的电流方程。

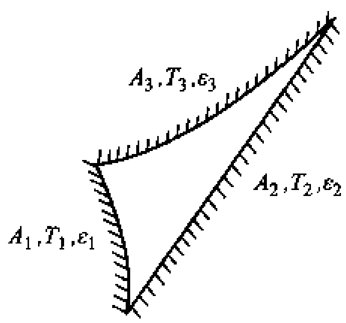


图 6.32　由三个表面组成的封闭系统

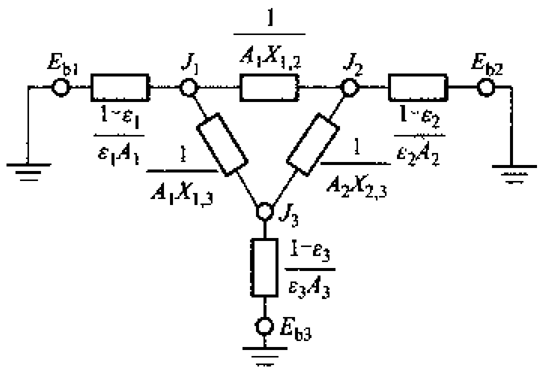


图 6.33　三表面封闭腔的等效网络图

节点 J_1，J_2 和 J_3 的热流方程如下：

$$J_1:\frac{E_{b1}-J_1}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1A_1}}+\frac{J_2-J_1}{\dfrac{1}{A_1X_{1,2}}}+\frac{J_3-J_1}{\dfrac{1}{A_1X_{1,3}}}=0$$

$$J_2:\frac{E_{b2}-J_2}{\dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}+\frac{J_1-J_2}{\dfrac{1}{A_1X_{1,2}}}+\frac{J_3-J_2}{\dfrac{1}{A_2X_{2,3}}}=0$$

$$J_3:\frac{E_{b3}-J_3}{\dfrac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 A_3}}+\frac{J_1-J_3}{\dfrac{1}{A_1X_{1,3}}}+\frac{J_2-J_3}{\dfrac{1}{A_2X_{2,3}}}=0$$

求解上面的方程组，再计算净换热量。

总结上面过程，可以得到应用网络法的基本步骤如下：

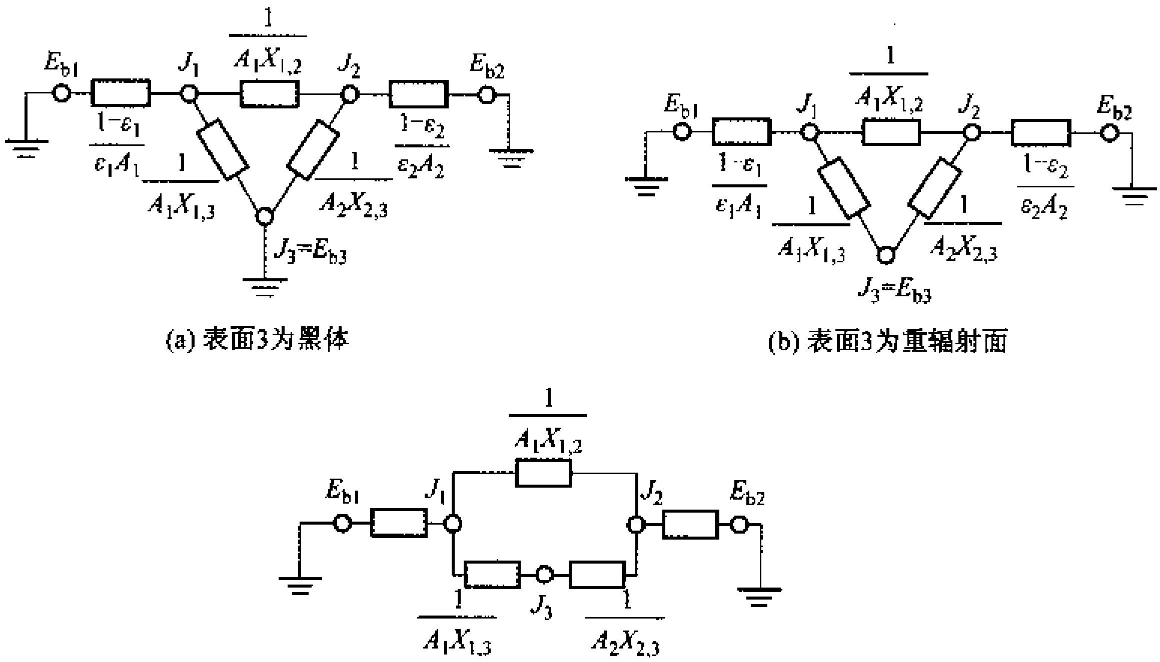
(1) 画等效电路图；

(2) 列出各节点的热流(电流)方程组；

(3) 求解方程组，以获得各个节点的等效辐射；

(4) 利用公式 $\Phi=\dfrac{E_{bi}-J_i}{\dfrac{1-\varepsilon_i}{A_i\varepsilon_i}}$ 计算每个表面的净辐射热流量。

三表面系统的两个特例如图 6.34 所示。



(a) 表面3为黑体　　(b) 表面3为重辐射面

(c) 图(b)的另一种表示方式

图 6.34　三表面系统辐射换热的两个特例

例 6-2　封闭房间内的热平板(重辐射面)

已知：两块大小为 0.5m×1.0m 的平行平板，平板之间的距离为 0.5m。其中一块平板的温度保持 1 000℃不变，另一块平板则保持为 500℃不变。两块平板的发射率分别为 0.2 和 0.5。现在将两块平板放置于一个非常大的房间内，并且此房间的墙壁温度为 27℃。每一块平板均与另一块平板以及房间有热交换，并且对平板而言仅仅考虑两块平板互相面对的那个表面。试计算平板之间以及平板与房间的净换热量。

解：这个问题属于三表面系统的换热问题，因此等效网络图如图 6.34(a)所示。由本题所给的数据可知　　$T_1=1\,000℃=1\,273\text{K}$　　$A_1=A_2=0.5\text{m}^2$

$$T_2=500℃=773\text{K} \qquad \varepsilon_1=0.2$$
$$T_3=27℃=300\text{K} \qquad \varepsilon_2=0.5$$

由于房间的面积 A_3 非常大，因此其表面热阻 $(1-\varepsilon_3)/\varepsilon_3 A_3$ 可近似的看成零而忽略不计，于是可得 $E_{b3}=J_3$。因此角系数 $F_{1,2}$ 就如例 6-1 所求一致

$$F_{1,2}=0.285=F_{2,1}$$
$$F_{1,3}=1-F_{1,2}=0.715$$
$$F_{2,3}=1-F_{2,1}=0.715$$

因此等效网络图中各热阻计算如下

$$\frac{(1-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 A_1}=\frac{1-0.2}{(0.2)(0.5)}=8.0 \qquad \frac{(1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 A_2}=\frac{1-0.5}{(0.5)(0.5)}=2.0$$
$$\frac{1}{A_1 X_{1,2}}=\frac{1}{(0.5)(0.285)}=7.018 \qquad \frac{1}{A_1 X_{1,3}}=\frac{1}{(0.5)(0.715)}=2.797$$
$$\frac{1}{A_2 X_{2,3}}=\frac{1}{(0.5)(0.715)}=2.797$$

由于将热阻 $(1-\varepsilon_3)/\varepsilon_3 A_3$ 可近似的看成零，因此可得如图 6.34(b)所示的等效网络图。为计算每块平板的热流，必须先求出有限辐射 J_1 和 J_2。根据基尔霍夫定律，可知流入任一节点的热流之和为零，则有

节点 J_1：
$$\frac{E_{b1}-J_1}{8.0}+\frac{J_2-J_1}{7.018}+\frac{E_{b3}-J_1}{2.797}=0$$

节点 J_2：
$$\frac{E_{b2}-J_2}{2.0}+\frac{J_1-J_2}{7.018}+\frac{E_{b3}-J_2}{2.797}=0$$

由于已知

$$E_{b1}=\sigma T_1^4=148.87\text{kW/m}^2$$
$$E_{b2}=\sigma T_2^4=20.241\text{kW/m}^2$$
$$E_{b3}=\sigma T_3^4=0.4592\text{kW/m}^2$$

将 E_{b1}，E_{b2} 和 E_{b3} 的值代人节点 J_1 和 J_2 的方程式，求解可得

$$J_1=33.469\text{kW/m}^2 \qquad J_2=15.054\text{kW/m}^2$$

对平板 1 的总热损失为

$$q_1=\frac{E_{b1}-J_1}{(1-\varepsilon_1)/\varepsilon_1 A_1}=\frac{148.87-33.469}{8.0}=14.425\text{kW}$$

同理，对平板 2 有

$$q_2=\frac{E_{b2}-J_2}{(1-\varepsilon_2)/\varepsilon_2 A_2}=\frac{20.241-15.054}{2.0}=2.594\text{kW}$$

房间所获得的总热量为

$$q_3=\frac{J_1-J_3}{1/A_1F_{1,3}}+\frac{J_2-J_3}{1/A_2F_{2,3}}=\frac{33.469-0.4592}{2.797}+\frac{15.054-0.4592}{2.797}=17.020\text{kW}$$

6.2.4 辐射换热的强化与削弱

在工程上，根据不同情况需要对辐射换热予以强化或削弱。在一定温度下要强化两表面间的辐射换热主要有两种途径，一种是增加换热表面发射率的方法，另一种是改变两表面的布置以增加角系数的方法。

为了削弱两物体表面间的辐射换热，主要有以下三种途径：第一，降低表面发射率；第二，减低角系数；第三，在两辐射表面之间加入隔热板。本节重点介绍采用安插隔热板来减少辐射换热的方法。所谓隔热板，是指插入两个辐射换热表面之间以削弱辐射换热的薄板。

现在来分析在平行平板之间插入一快隔热板所引起的辐射换热的变化。对于两个无限大平面组成的封闭系统，其换热量为

$$Q_{1,2}=\frac{E_{b1}-E_{b2}}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1}+\dfrac{1}{A_1X_{1,2}}+\dfrac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} \tag{6-41}$$

为简单起见，假设 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon, A_1=A_2\quad x_{1,2}=x_{2,1}=1$，则上式变为

$$q_{1,2}=\frac{E_{b1}-E_{b2}}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1}=\varepsilon_s(E_{b1}-E_{b2}) \tag{6-42}$$

现在在两平行平板之间插入一块发射率仍为 ε 的隔热板，这样就组成了两个换热系统，如图 6.35 所示。稳态时，辐射换热方程组如下

$$\begin{cases}q_{1,3}=\varepsilon_s(E_{b1}-E_{b3})\\ q_{3,2}=\varepsilon_s(E_{b3}-E_{b2})\Rightarrow q_{1,2}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_s(E_{b1}-E_{b2})\\ q_{1,2}=q_{1,3}=q_{3,2}\end{cases}$$

可见，与没有隔热板时相比，辐射换热量减小了一半。若采用发射率低的金属薄板作为隔热板，则效果更好。如在低温杜瓦的夹层内采用薄铝箔为隔热板，就可有效地减弱换热。

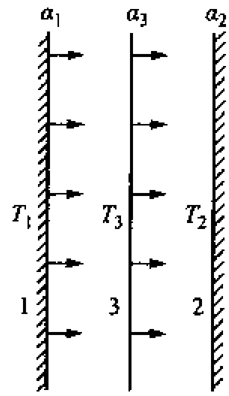


图 6.35　隔热板

隔热板技术在工程上应用甚广，如汽轮机中用于减少内、外套管间辐射换热；应用于储存液态气体的低温容器；用于超级的隔热油管；用于提高温度测量的准确度等等。

最后介绍等效算法。在实际工程技术问题中对流与辐射常常同时存在。这种对流与辐射同时存在的换热过程称为复合换热。对于复合换热，工程上为计算方便，常常采用将辐射换热量折算成对流换热量。然后将它表示成牛顿冷却公式的形式，即

$$Q_r=Ah_r\Delta t \tag{6-43}$$

式中，h_r 称为辐射换热表面传热系数(习惯上称为辐射换热系数)。于是复合换热总的换热量为

$$Q=Ah_c\Delta t+Ah_r\Delta t=Ah_t\Delta t \tag{6-44}$$

式中，下标"c"表示对流换热；h_t 为包括对流域辐射换热在内的总表面传热系数，称它为复合换热表面传热系数。

例 6-3　隔热板的作用

已知：两块非常大的平行平板之间换热，发射率分别为 0.3 和 0.8。当将一块发射率为 0.04的隔热板放在两平行平板之间时，换热量降低了多少？

解：无隔热板的换热如下

$$\frac{q}{A}=\frac{\sigma(T_1{}^4-T_2{}^4)}{1/\varepsilon_1+1/\varepsilon_2-1}=0.279\sigma(T_1{}^4-T_2{}^4)$$

而增加隔热板之后，各个热阻分别为

$$\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}=\frac{1-0.3}{0.3}=2.333$$

$$\frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3}=\frac{1-0.04}{0.04}=24.0$$

$$\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}=\frac{1-0.8}{0.8}=0.25$$

因此增加隔热板之后的总热阻为

$$2.333+2\times 24+2\times 1+0.25=52.583$$

因此，增加隔热板之后的换热如下

$$\frac{q}{A}=\frac{\sigma(T_1^4-T_2^4)}{52.583}=0.01902\sigma(T_1^4-T_2^4)$$

因此可知，增加隔热板之后，换热量减少了 93.2%。

6.2.5 气体辐射

本节简要介绍气体辐射的特点、换热过程及其处理方法。

在工程中常见的温度范围内，空气、氢、氧、氮等结构对称的双原子气体，无发射和吸收辐射的能力，可认为是透明体。但是，二氧化碳、水蒸气、二氧化硫、甲烷和一氧化碳等气体都具有辐射的本领。随着燃料的不同，燃烧产物中辐射气体的成分是不同的。工程上常见的二氧化碳和水蒸汽具有很强的吸收和发射热辐射的本领，而其他的气体则较弱。本节主要介绍二氧化碳和水蒸汽的辐射和吸收。

1. 气体辐射的特点

1) 气体辐射对波长具有强烈的选择性

它只在某些谱带内具有发射和吸收辐射的本领(即光带)，而对于其他谱带则呈现透明状态。如图 6.36 所示二氧化碳和水蒸汽的光带图。由于气体的这种选择性的特点，气体不是灰体。

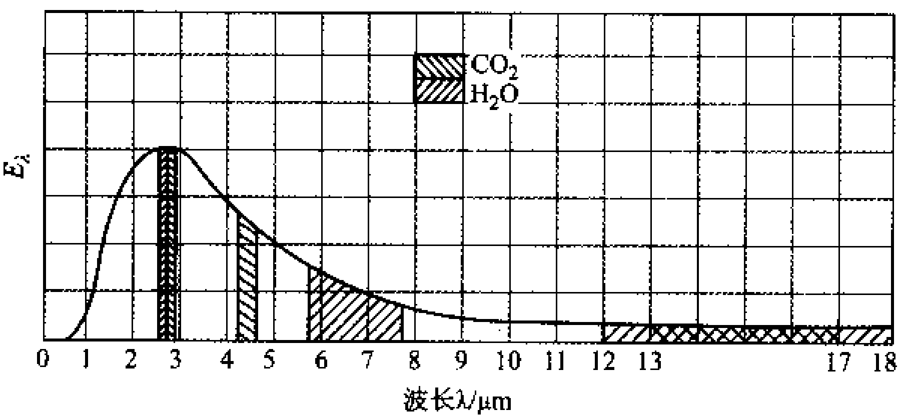


图 6.36 CO_2 和 H_2O 的主要吸收谱带

2) 气体的辐射和吸收是在整个容积中进行的

气体的发射率和吸收比还与容器的形状和容积大小有关。

2. 气体辐射的衰减规律

如图 6.37 所示，假设投射到气体界面 $x=0$ 处的光谱辐射度为 $L_{\lambda,0}$，通过一段距离 x 后，该辐射度变为 $L_{\lambda,x}$。再通过微元气体层 $\mathrm{d}x$ 后，其衰减量为 $\mathrm{d}L_{\lambda,x}$。理论上已经证明，$\frac{\mathrm{d}L_{\lambda,x}}{L_{\lambda,x}}$ 与行程 $\mathrm{d}x$ 成正比，设比例系数为 K_x，则有

$$\frac{\mathrm{d}L_{\lambda,x}}{L_{\lambda,x}}=-K_\lambda \mathrm{d}x \tag{6-45}$$

式中，负号表示吸收，K_λ 为光谱衰减系数，它取决于气体的种类、密度和波长。对上式进行积分可得

$$\int_{L_{\lambda,0}}^{L_{\lambda,s}}\frac{\mathrm{d}L_{\lambda,x}}{L_{\lambda,x}}=-\int_0^s K_\lambda \mathrm{d}x$$

即

$$L_{\lambda,s}=L_{\lambda,0}e^{-K_\lambda S} \tag{6-46}$$

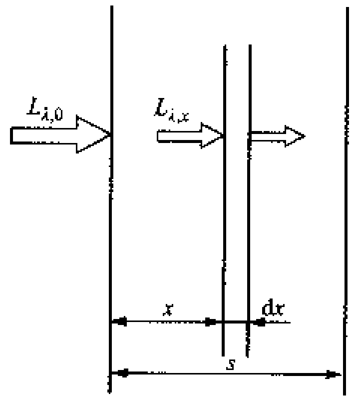


图 6.37　光谱辐射穿过气体层时的衰减

式(6-46)的规律称为贝尔(Beer)定律，表明光谱辐射度在吸收性气体中传播时按指数规律衰减。式中，s 是辐射通过的路程长度，常称之为射线程长。

式(6-46)可以写为

$$\frac{L_{\lambda,s}}{L_{\lambda,0}}=e^{-K_\lambda s}=\tau_\lambda \tag{6-47}$$

式中，τ_λ 为光谱透射比。贝尔定律表明，投射到气体层界面上的辐射能在穿过气体的行程中被吸收，并逐步削弱，就像光在雾层中被吸收减弱一样。

对于气体，反射率为零，则有

$$\alpha(\lambda,s)=1-\tau(\lambda,s)=1-e^{-K_\lambda s} \tag{6-48}$$

根据 Kirchhoff 定律，光谱发射率为

$$\varepsilon(\lambda,s)=\alpha(\lambda,s)=1-e^{-K_\lambda s} \tag{6-49}$$

工程中最为关心的是确定气体所有谱带内辐射能量的总和。需要首先确定气体的发射率 ε_g，然后利用 $\Phi=\varepsilon_g A\sigma T_g^4$ 计算气体的发射辐射。

从式(6-49)可知，热辐射在气体内呈指数规律衰减。气体层界面所感受到的辐射是到达界面的整个容积气体的辐射。ε_g 与射线行程的长度 s 有关，而 s 又取决于气体容积的形状和大小。如图 6.38 所示，不同方向到达 A 处或 B 处的射线行程是不同的。只有如图 6.39 所示的半球气体容积对球心 dA 的辐射，各个方向的射线行程都是半径 L。为此，工程上引入了当量半球的概念。所谓当量半球，是将非球形的容积等效为半球，且半球内气体具有与所研究的情况相同的温度、压力和成分时，该半球内气体对球心的辐出度等于所研究情况下气体对指定地点的辐出度，当量半球的半径就是等效的射线程长。一些典型几何容积的气体对整个包壁的平均射线程长列于表 6.2 中。在缺少资料的情况下，任意几何形状气体对整个包壁的平均射线程长可按下式计算：

$$s=3.6\frac{V}{A} \tag{6-50}$$

式中，V 为气体容积，m^3；A 为包壁面积，m^2。

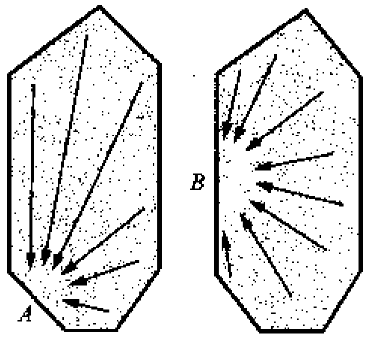


图 6.38 气体对不同地区的辐射

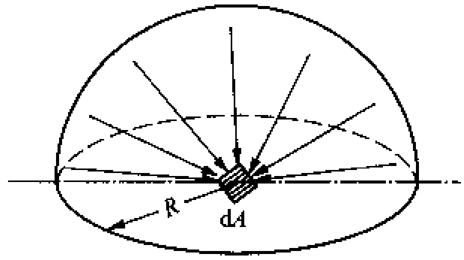


图 6.39 半球内气体对球心的辐射

表 6.2 气体辐射的平均射线行程

气体容积的形状	特性尺度	受到气体辐射的位置	平均射线程长
球	直径 d	整个包壁或壁上的任何地方	$0.6d$
立方体	边长 b	整个包壁	$0.6b$
高度等于直径的圆柱体	直径 d	底面圆心 整个包壁	$0.77d$ $0.6d$
两无限大平行平板之间	平板间距 H	平板	$1.8H$
无限长圆柱体	直径 d	整个包壁	$0.9d$
高度等于底圆直径两倍的圆柱体	直径 d	上下底面 侧面 整个包壁	$0.6d$ $0.76d$ $0.73d$
1×1×4 的正方柱体	短边 b	1×4 表面 1×1 表面 整个包壁	$0.82b$ $0.78b$ $0.81b$
位于叉排或顺排管束间的气体	节距 s_1, s_2，外直径 d	管束表面	$0.9d\left(\frac{4s_1s_2}{\pi d^2}-1\right)$

ε_g 除了与 s 有关外，还与气体的温度和气体的分压力有关，有如下关系

$$\varepsilon_g = f(T_g, ps) \tag{6-51}$$

图 6.40 给出了不计气体分压力单独影响时实验测定的水蒸气发射率的图线。图 6.41 给出的是考虑气体分压力单独影响的修正系数 C_{H_2O}，则水蒸气的发射率为

$$\varepsilon_{H_2O} = C_{H_2O}\,\varepsilon^*_{H_2O} \tag{6-52}$$

对应于 CO_2 的图分别是图 6.42 和图 6.43。于是有

$$\varepsilon_{CO_2} = C_{CO_2}\varepsilon^*_{CO_2} \tag{6-53}$$

当气体中同时存在二氧化碳和水蒸气时，气体的发射率由下式给出：

$$\varepsilon_g = C_{H_2O}\,\varepsilon^*_{H_2O} + C_{CO_2}\varepsilon^*_{CO_2} - \Delta\varepsilon \tag{6-54}$$

式中，$\Delta\varepsilon$ 是由于水蒸汽和二氧化碳光带部分重叠引入的小修正量，由图 6.44 给出。

气体的吸收比 α_g 则由下式给出

$$\alpha_g = C_{H_2O}\,\alpha^*_{H_2O} + C_{CO_2}\,\alpha^*_{CO_2} - \Delta\alpha \tag{6-55}$$

式中，修正系数 C_{H_2O}和 C_{CO_2} 与发射率公式中的处理方法相同，而 $\alpha^*_{H_2O}$，$\alpha^*_{CO_2}$ 和 $\Delta\alpha$ 的确定可以采用下面的经验公式：

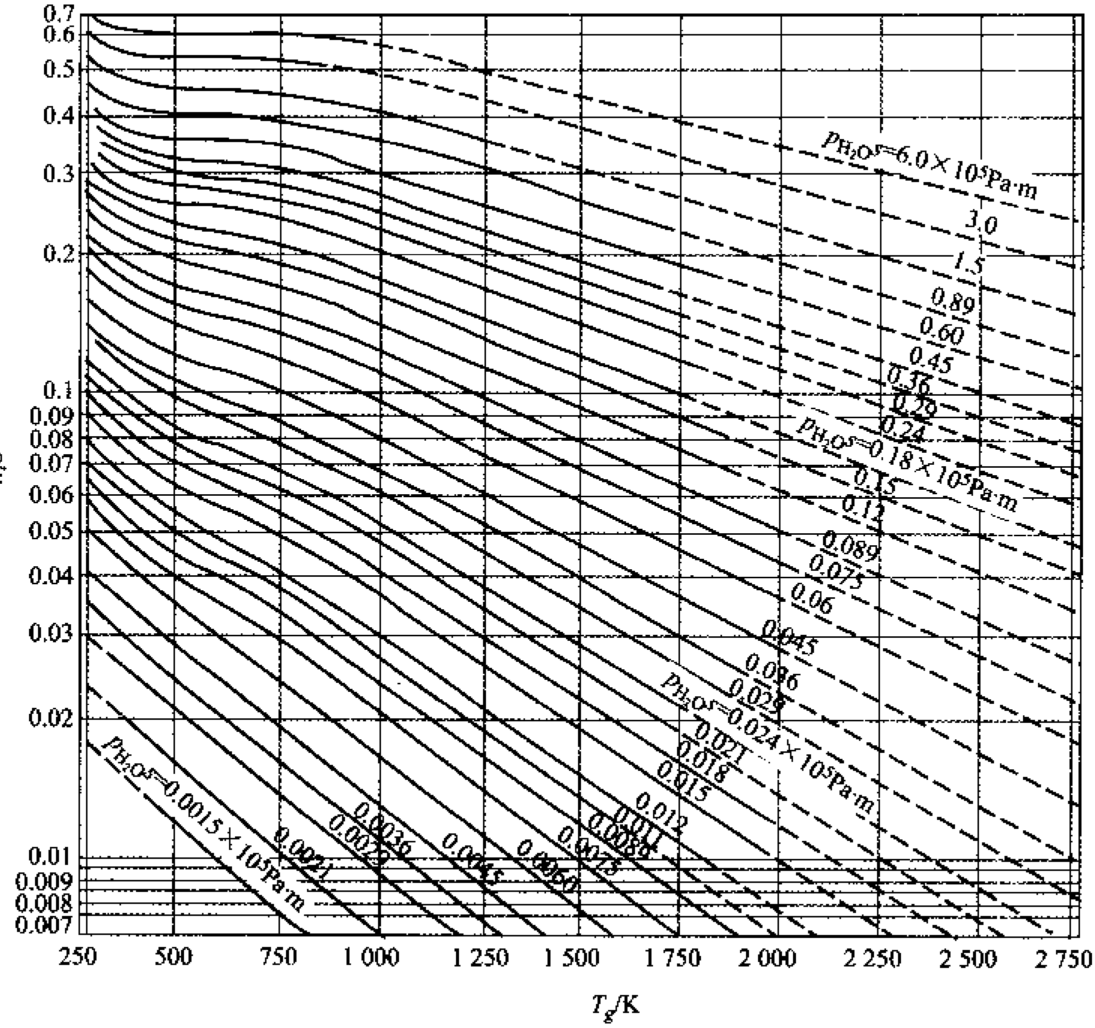


图 6.40　$\varepsilon^*_{H_2O}=(T_g, p_{H_2O}s)$

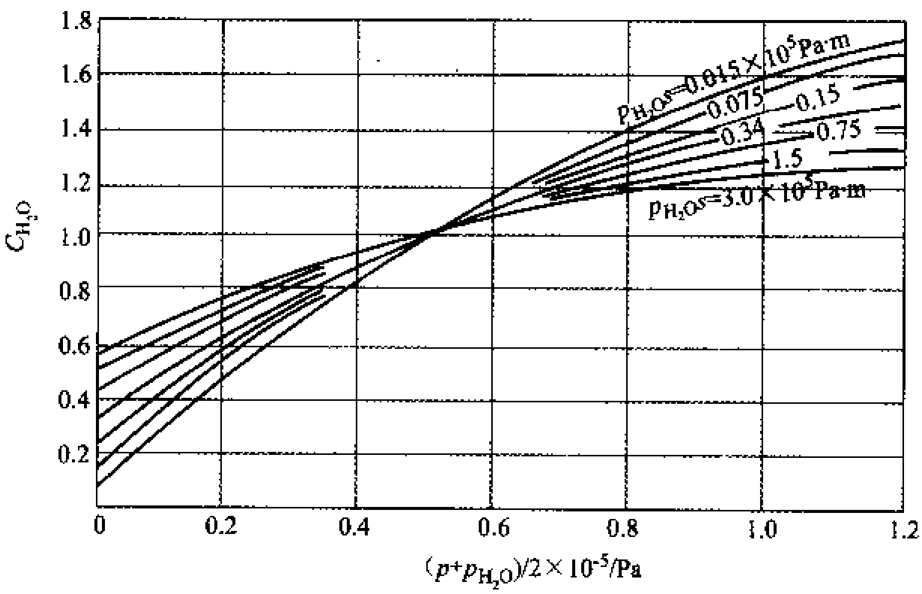


图 6.41　C_{H_2O}修正系数

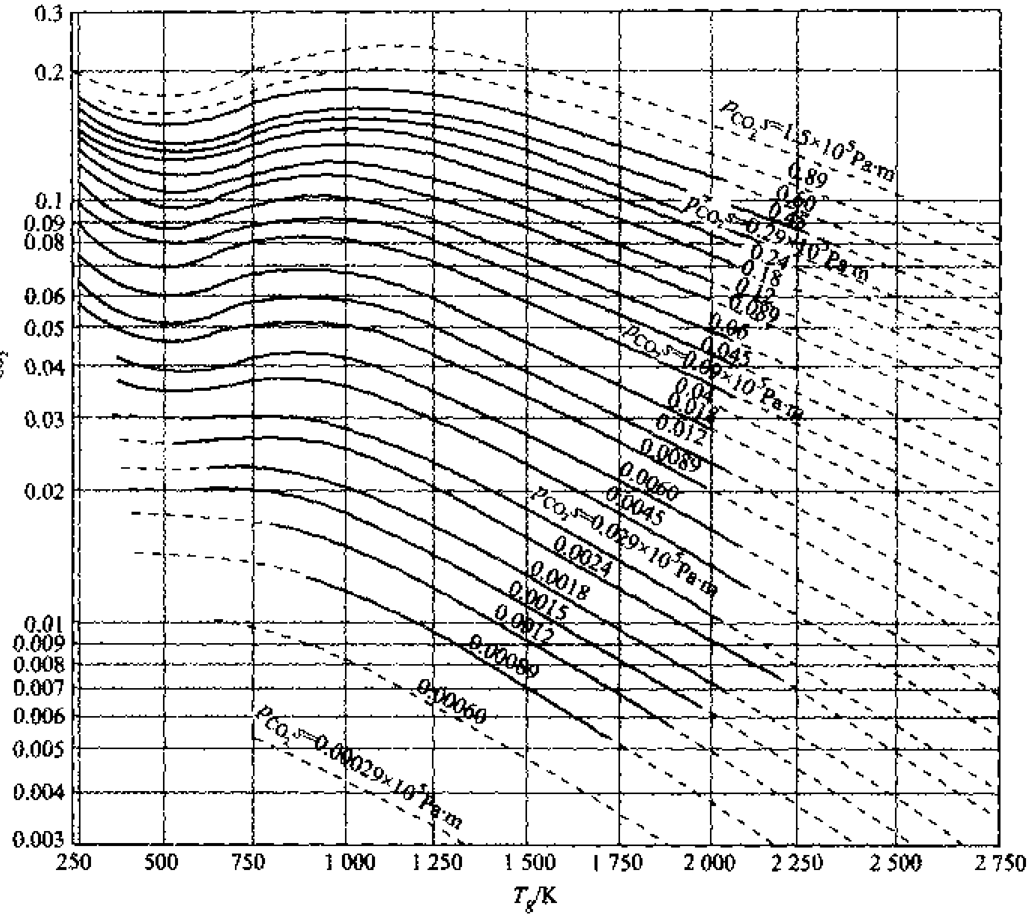


图 6.42　$\varepsilon^*_{CO_2}=(T_g, p_{CO_2}s)$

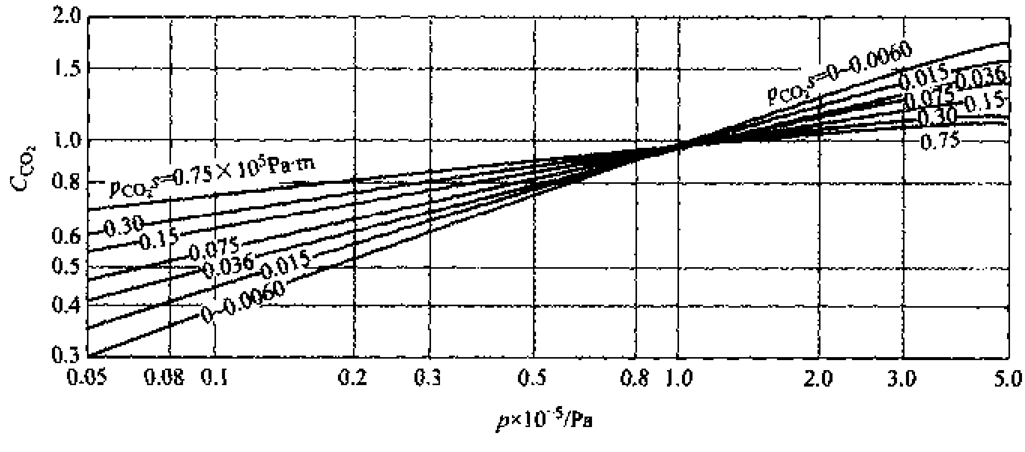


图 6.43　C_{CO_2} 修正系数

$$\alpha^*_{H_2O}=[\varepsilon^*_{H_2O}]_{T_w,\,p_{H_2O}s(T_w/T_g)}\left(\frac{T_g}{T_w}\right)^{0.45} \tag{6-56}$$

$$\alpha^*_{CO_2}=[\varepsilon^*_{CO_2}]_{T_w,\,p_{CO_2}s(T_w/T_g)}\left(\frac{T_g}{T_w}\right)^{0.65} \tag{6-57}$$

$$\Delta\alpha=[\Delta\varepsilon]_{T_w} \tag{6-58}$$

在气体发射率和吸收比确定后，气体与黑体外壳之间的辐射换热公式为

$$q=\varepsilon_g E_{b,g}-\alpha_g E_{b,w} \tag{6-59}$$

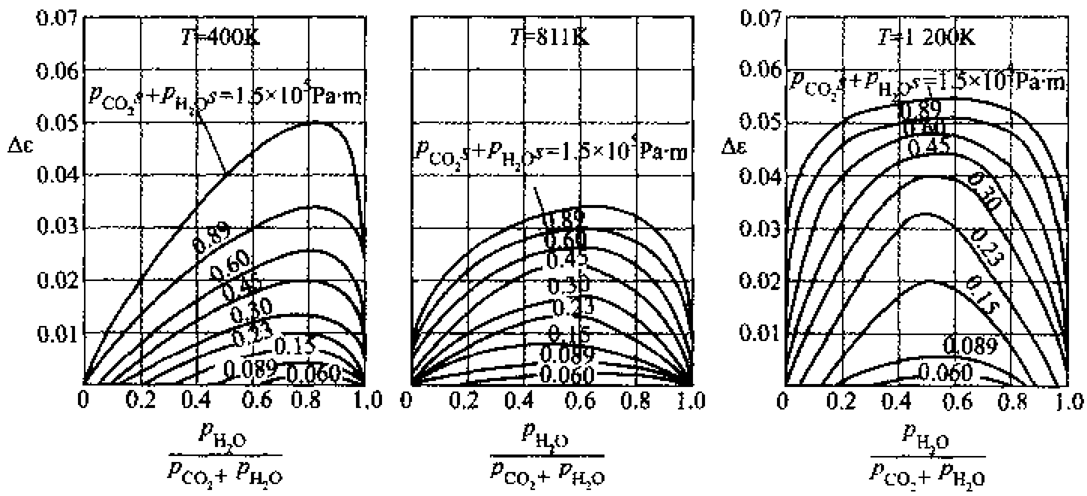


图 6.44 Δε 修正量

例 6-4 气体辐射

在直径为 1m、长 2m 炉膛中，烟气总压力为 0.1MPa，二氧化碳占 10%，水蒸汽占 8%，其余为不辐射气体。(1)已知烟气温度为 1 027℃，试确定烟气的发射率；(2)若炉膛壁温 $t_w=527$℃，可视为黑体外壳 $\varepsilon_w=1$，试确定烟气对外壳辐射的吸收比。

解：(1) 由表 6.2 查得平均射线行程：

$$L=0.73d=0.73\times1=0.73\text{m}$$

于是

$$p_{H_2O}L=0.008\times0.73=0.005\,84\ \text{MPa}\cdot\text{m}$$

$$p_{CO_2}L=0.01\times0.73=0.007\,3\ \text{MPa}\cdot\text{m}$$

根据烟气温度 $t_g=1\,027$℃，及 $p_{H_2O}L$，$p_{CO_2}L$ 值分别由图 6.40，6.42 查得

$$\varepsilon_{H_2O}^*=0.068,\ \varepsilon_{CO_2}^*=0.092$$

计算参量

$$(p-p_{H_2O})/2=(0.1+0.008)/2=0.0054\ \text{MPa}$$

$$p=0.1\ \text{MPa}$$

$$p_{H_2O}/(p_{H_2O}+p_{CO_2})=0.008/(0.01+0.008)=0.444$$

$$(p_{H_2O}+p_{CO_2})L=(0.008+0.01)\times0.73=0.013\,1\ \text{MPa}\cdot\text{m}$$

分别从图 6.41，6.43，6.44 查得

$$C_{H_2O}=1.05,\ C_{CO_2}=1.0,\ \Delta\varepsilon=0.014$$

把以上各值代入式(6-54)得

$$\varepsilon_g=1.05\times0.068+1.0\times0.092-0.014$$

(2)计算如下参量：

$$p_{H_2O}L\frac{T_w}{T_g}=0.005\,84\times\frac{800}{1\,300}=0.003\,6\ \text{MPa}\cdot\text{m}$$

$$p_{CO_2}L\frac{T_w}{T_g}=0.007\,3\times\frac{800}{1\,300}=0.004\,5\ \text{MPa}\cdot\text{m}$$

根据这些参量和 $t_w=527$℃，从图 6.40，6.42 分别查得

$$\varepsilon_{H_2O}^*=0.088,\ \varepsilon_{CO_2}^*=0.082$$

于是

$$\alpha_{H_2O}^{*}=0.088\times\left(\frac{1\,300}{800}\right)^{0.45}=0.109$$

$$\alpha_{CO_2}^{*}=0.082\times\left(\frac{1\,300}{800}\right)^{0.65}=0.112$$

再据

$$t_w=527℃\approx530℃$$

$$p_{H_2O}/(p_{H_2O}+p_{CO_2})=0.444$$

$$(p_{H_2O}+p_{CO_2})L=0.013\,1\ \text{MPa}\cdot\text{m}$$

在图 6.44 上查得 $\Delta\alpha=0.008$。于是，根据式(6-55)，气体吸收比为

$$\alpha_g=1.05\times0.11+1\times0.112-0.008=0.219$$

习　题

1. 某表面温度为 1 400K，其光谱发射率可表示为：$0<\lambda<0.6\mu m$ 时 $\varepsilon_\lambda=0.08$；$0.6<\lambda<5\mu m$ 时 $\varepsilon_\lambda=0.4$；$5<\lambda<\infty$时 $\varepsilon_\lambda=0.4$。试计算其表面辐射力。

2. 直径为 $d_1=10$cm 和 $d_2=5$cm 的两圆盘相平行，中心连线垂直与两圆盘，长度为 10cm。试确定 X_{12}和 X_{21}。

3. 有一房间，长宽均为 4m，高 3m。一侧壁面温度为 260℃，地板温度为 90℃。其余四个表面完全绝热。设各表面均为黑体。试计算此高温壁面与地板之间的辐射换热量。

4. 两黑体平板平行放置，尺寸均为 1.2m×1.2m，两平板相距 1.2m。平板 1 温度为 800K，平板 2 温度为 500K。平板被放在一大房间中，房间壁面温度为 300K。计算两平板之间的辐射换热量是多少？

5. 一直径为 5cm 的长管道横穿过一房间。房间空气温度为 20℃，压力为大气压力。管表面温度 93℃，设表面发射率为 0.6，试计算管道单位长度上的辐射热损失。

6. 一竖直平板，长 60cm，宽 30cm，温度维持在 95℃。放置在房间中，房间内空气为 1atm，20℃。房间内墙壁温度均为 20℃。设平板发射率为 0.8。试确定平板的辐射换热量是多少？

7. 长度均为 30cm 的同心圆柱，内圆柱直径为 8cm。要使角系数 $X_{1,2}=0.8$，外圆柱需要多大的直径？设内圆柱为表面 1。

8. 圆柱形熔炉的下表面有电加热元件，可产生 7kW/m^2 的稳定热流。炉底面直径为 75cm。周围边壁高 50cm，并可看作重辐射面。底面发射率为 0.8。顶部温度为 400K，表面发射率为 0.6。试确定底面的温度以及壁面温度。

9. 圆柱 1 直径为 1m，长为 1m，温度保持在 800K，表面发射率 0.65。圆柱 2，直径为 2m，长 1m，围绕在圆柱 1 外，而且完全绝热。两圆柱均放置在 300K 的大房间内。试计算内圆柱的热损失。

10. 直径为 3.0cm 的圆球，温度为 1 000K，表面发射率 0.6，被包围在直径为 9.0cm 的大球内，大球内外表面发射率均为 0.3。两球均放置在 30℃的大房间内。试计算小球的热损失。

11. 两平行大平板，温度分别是 400℃和 600℃，表面发射率为 0.6。将 $\varepsilon=0.1$ 的隔热板放置与两平板正中间，试计算隔热板与平板间单位面积的辐射传热量。

12. 直径为 2.5cm 的长圆柱形热源，温度维持在 500℃，表面发射率为 0.8。将其置于一

壁面温度为25℃的大房间中。如果在热源外套一直径为30cm，表面发射率为0.2的铝隔热罩，该热圆柱的辐射换热量将降低多少？隔热罩温度又是多少？

13. 直径分别为50cm和25cm的两平行圆盘，相距25cm。大圆盘温度为800℃，表面发射率为0.6。小圆盘温度为400℃，表面发射率为0.4。两圆盘被放置在壁面温度为250℃的大房间中。试计算大圆盘的辐射热损失。

14. 尺寸为30cm×60cm的平板，表面发射率为0.6，置于大房间中。平板被加热至370℃。平板只有一面与房间换热。有一相同尺寸的高反射率平板（$\rho_s=0.7$，$\rho_D=0.1$），与热平板垂直放置在房间内。房间温度为90℃。试计算热平板的总散热量以及反射板的温度。忽略对流换热。

15. 直径为10cm的圆盘，温度为500℃，将其装在直径为10cm，长10cm的圆柱末端。圆柱内外表面的发射率均为0.3。圆柱开口端暴露在温度为40℃的大房间中。试计算该圆盘的热损失。

16. 有一大表面，对长波辐射$\alpha=0.6$，对太阳辐射$\alpha=0.95$。如果其背面绝热，正面太阳辐射度950W/m^2，周围环境温度300K，对流传热系数$h=12$ W/(m^2·℃)。试计算达到平衡时表面的温度是多少？

第 7 章　复合换热与传热过程

7.1　复合换热与传热

复合换热是指两种或三种基本热量传递方式同时起作用的换热。例如加热工件在厂房中的冷却散热，锅炉及窑炉余热回收装置的换热器中高温烟气与管束管壁之间的换热都是复合换热的实例。这些实例的共同特点是对流换热与辐射换热两种基本热量传递方式同时在起作用。

对于实际问题，换热方式往往不会单独出现。在分析任何一个实际问题时，确定哪些热量传递方式在起作用，选用什么方法或计算公式是解决问题的关键。例如，前已述及只要物体有温度，辐射换热总是存在的。但是对于一些具体问题，由于物体温度较低，辐射换热量较小，通常在考虑复合换热时略去不计，但这并不表明辐射换热不存在。

复合换热计算的目的是确定两种并联的热量传递方式的总效果。原则上复合换热的总换热量等于构成并联系统的两种基本换热方式换热量的叠加总合，即

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_r \tag{7-1}$$

式中，Φ 为复合换热的总换热量，Φ_c 为对流换热量，Φ_r 为辐射换热量。Φ_c 和 Φ_r 均可分别按对流换热及辐射换热的有关公式计算。下面对复合换热概念进行简要讨论。

1. *复合换热表面传热系数*

以一高温物体在房间中冷却的复合换热问题为例作具体分析。此例中 Φ_c 按牛顿冷却公式计算，即：

$$\Phi_c = h_c(t_w - t_f)A \tag{a}$$

式中，t_w 为物体表面温度，t_f 为周围空气温度，A 为换热表面积，h_c 为表面传热系数，按表面与空气间自然对流换热的有关公式计算。

在此例中，辐射换热量是物体表面与它所能看见的固体壁面间的辐射换热，符合大空腔内包小物体的情况，即

$$\Phi_r = \varepsilon A C_b\left[\left(\frac{T_w}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_f}{100}\right)^4\right] \tag{7-2}$$

式中，ε 为物体表面的发射率，T_w 为物体表面的热力学温度，T_f 为环境物体的热力学温度。若将 Φ_r 改写成表面传热系数的形式，则

$$\Phi_r = h_r(t_w - t_f)A \tag{b}$$

$$h_r = \frac{\varepsilon C_b\left[\left(\frac{T_w}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_f}{100}\right)^4\right]}{T_w - T_f} \tag{7-3}$$

此处，h_r 称为辐射换热表面传热系数，它是按照对流换热表达形式折合而来的。

将式(a)，(b)代入式(7-1)得

$$\Phi = (h_c + h_r)(t_w - t_f)A = h(t_w - t_f)A \tag{7-4}$$

式(7-4)中的h称为复合换热表面传热系数，它等于对流换热表面传热系数与辐射换热表面传热系数之和。复合换热表面传热系数的引入，给复杂换热系统的分析计算带来了一些方便。

在有自然对流和辐射换热的复合换热中，两种换热方式所占的份额具体是什么情况呢？现以水平放置的热圆柱体在空气中的散热为例进行定量说明。计算表明，对于一可认为是黑体的热圆柱体，直径$d=10\text{mm}$，当温压较小时，对流份额大于辐射；当温压达170℃时，两种方式份额相当；而对于直径较大、温压不大时，两种方式换热热量的份额约各占50%；对于直径极细的金属丝，当温压比金属丝烧红的温度(约800℃)还高时，两种方式换热热量的份额各占50%。

2. 通过气隙的复合换热与气隙当量热导率λ_e

通过气隙的复合换热计算是热加工工艺需要特别注意的复合换热过程。例如，铸件在金属铸型中冷却时体积要收缩，而金属铸型则受热膨胀，以致在铸件与铸型之间形成一层很薄的气隙。气隙的热阻很大，它的存在对铸件的冷却过程有重要影响。当铸型上敷有热阻大的涂料层时，涂料层对铸件的冷却过程也有重要影响。但是通过涂料层的热量传递是单一导热方式，不属于复合换热范围。因此，通过气隙的复合换热就是指铸件与涂料表面间的复合换热。

由于气隙很薄，对流难以发展，所以通过气隙的复合换热是导热和辐射换热两种基本换热方式并联的换热现象。虽然换热过程总体上是非稳态的，在短暂瞬间可允许作准稳态分析。

气隙的厚度是毫米级的，这种特点使复杂外形的气隙也允许作为平壁来分析。平壁气体层复合换热的热流密度可用下式表示：

$$q=q_d+q_r \tag{7-5}$$

式中，q为复合换热热流密度，q_d为导热热流密度，q_r为辐射换热热流密度。

根据通过平板的导热公式，可得：

$$q_d=\frac{\lambda_g}{\delta_g}(t_1-t_2) \tag{c}$$

式中，δ_g为气隙厚度，λ_g为气体热导率，t_1,t_2为气隙两侧面的摄氏温度。

根据两平壁间辐射换热公式，有

$$q_r=\frac{C_b\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}-1}$$

式中，T_1,T_2为气隙两侧面的热力学温度，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$为两侧面的发射率。

同上例，引入气隙当量热导率λ_e，q可表示为：

$$q=\frac{\lambda_e}{\delta_g}(t_1-t_2) \tag{7-6}$$

将上式与式(7-5)，(c)，(d)对比可得：

$$\lambda_e=\lambda_g+\frac{C_b\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}-1}\frac{\delta_g}{t_1-t_2} \tag{7-7}$$

例7-1 复合换热的计算

已知：水平放置的热力管道在厂房中散热。管道外径$d=108\text{mm}$，其外表面温度$t_w=80℃$，厂房内空气温度$t_f=10℃$，管道外表面$\varepsilon=0.8$。试按复合换热计算每米管道的散热量。

解：此题的复合换热过程按照自然对流与辐射换热并联组成进行分析。

设每米长管道自然对流换热的散热量为$(q_l)_c$，表面传热系数：

$$\bar{h}=1.34\left(\frac{\Delta t}{d}\right)^{1/4}=1.34\mathrm{W/(m^{4/7}\cdot ℃^{5/4})}\times\left(\frac{70℃}{0.018\mathrm{m}}\right)^{1/4}=6.76\mathrm{W/(m^2\cdot ℃)}$$

每米长管道自然对流换热的散热量为：

$$(q_l)_c=\bar{h}(t_w-t_f)\pi d=6.76\times70\times\pi\times0.108=160\mathrm{W/m}$$

辐射换热部分$(ql)_r$：

$$(q_l)_r=\frac{\Phi_r}{l}=\varepsilon\frac{A}{l}C_b\left[\left(\frac{T_w}{100}\right)^4-\left(\frac{T_f}{100}\right)^4\right]$$

$$=0.8\times\pi\times0.108\times5.67\times\left[\left(\frac{80+273}{100}\right)^4-\left(\frac{10+273}{100}\right)^4\right]=140\mathrm{W/m}$$

于是复合换热的散热量为

$$q_l=160+140=300\mathrm{W/m}$$

7.2 传热过程及其计算

工程上冷热流体常有壁面隔开。热量从间壁一侧的流体穿过间壁传到另一侧流体中去的过程称为传热过程。实际工程中各种换热器的换热过程都是传热过程的实例；工业上隔热、保温技术的核心也是从分析传热过程得到的结果。如图7.1所示的传热过程包括串联着的三个环节：第一，从热流体到高温侧壁面的热量传递；第二，穿过固体壁面（单层或多层）的导热；第三，从低温侧壁面到冷流体的热量传递。传热过程的基本计算公式为下列传热方程式：

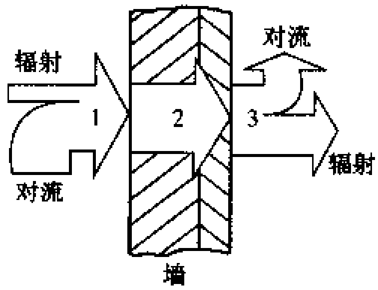


图7.1 墙壁的散热
1-辐射换热+对流换热；
2-壁面导热；
3-对流换热+辐射换热

$$\Phi=KA(t_{f1}-t_{f2})=AK\Delta t \tag{7-8}$$

式中：K是传热系数（总传热系数），表达式为$K=\frac{1}{AR_{tot}}$，单位为$\mathrm{W/(m^2K)}$。对于不同的传热过程，K的计算公式也不同。它表明单位温压Δt、单位换热面积$\mathrm{m^2}$时的热流量。

传热系数是表征传热过程强烈程度的标尺，不是物性参数，与具体换热过程有关。实际上，传热过程越强烈，传热系数越大，反之则越弱。确定传热系数是传热过程计算的关键。下面分别讨论通过平壁和通过圆筒壁的两种典型传热过程的计算。

1. 通过平壁的传热

如图7.2所示，平壁两侧分别通过冷、热的流体，平壁厚度为δ。设平壁的热导率为λ，两侧的表面传热系数分别为h_1和h_2，单位面积的热阻可表示成$\Delta t/q$。则构成传热过程的三个串联环节的热阻分别是计算为：

忽略热辐射换热，则：

左侧对流换热热阻：$R_{h_1}=\frac{1}{Ah_1}$

固体的导热热阻：$R_\lambda=\frac{\delta}{A\lambda}$

右侧对流换热热阻：$R_{h_2}=\dfrac{1}{Ah_1}$

上面传热过程中传递的热量为

$$\Phi=\frac{(t_{f1}-t_{f2})}{R_{h_1}+R_\lambda+R_{h_2}}=\frac{(t_{f1}-t_{f2})}{\dfrac{1}{Ah_1}+\dfrac{\delta}{A\lambda}+\dfrac{1}{Ah_2}}=k(t_{f1}-t_{f2}) \tag{7-9}$$

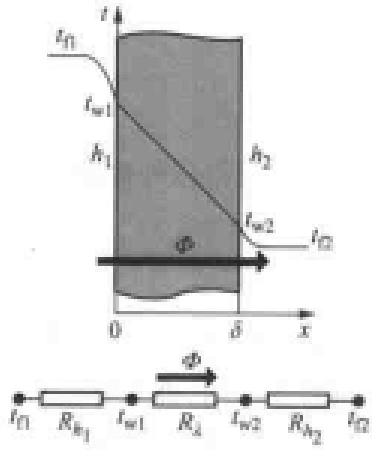


图 7.2　通过平壁传热过程分析

式中传热系数 k 即由下式确定：

$$k=\frac{1}{\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{\delta}{\lambda}+\dfrac{1}{h_2}}=\frac{1}{R_{h_1}+R_\lambda+R_{h_2}} \tag{7-10}$$

这就是通过平壁传热的传热系数的计算公式。上式表明，已知壁厚 δ、材料热导率 λ 和两侧的表面传热系数 h_1 和 h_2，即可计算出传热系数的值。考虑辐射换热时，对流换热系数应该采用等效传热系数（即总表面传热系数）。例如，在单相对流的情况下，总表面传热系数为$h_t=h_c+h_r$；在膜态沸沸腾的情况下，总表面传热系数为 $h_t^{4/3}=h_c^{4/3}+h_r^{4/3}$，其中辐射等效换热系数为 $h_r=\dfrac{\varepsilon\sigma(T_1^4-T_2^4)}{T_1-T_2}$。

对于多层平壁的传热过程，根据串联环节热阻叠加等于总热阻的原则，可以写出通过多层平壁传热的传热系数计算式

$$k=\frac{1}{\dfrac{1}{h_1}+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\delta_i}{\lambda_i}+\dfrac{1}{h_2}} \tag{7-11}$$

2. 通过圆筒壁的传热

由于圆筒壁内外侧表面积不相等，对传热过程的热阻分析不能用单位面积热阻而必须改用总面积热阻，即 $\Delta t/\Phi$。在构成圆筒壁传热的三个环节中总热流量 Φ 总是不变的。如图7.3所示，圆筒壁的内、外半径分别为 r_i，r_o（内、外直径分别为 d_i，d_o），筒壁材料的热导率为 λ，筒壁内、外侧的复合换热表面传热系数分别为 h_i，h_o，圆筒壁的内、外壁的温度分别为 t_{wi}，t_{wo}，筒壁内外的流体温度分别为 t_i，t_o。壁内侧对流换热量：

$$\Phi=h_i\pi d_i l(t_{fi}-t_{wi}) \tag{a}$$

圆筒壁导热：
$$\Phi=\frac{\pi l(t_{wi}-t_{wo})}{\dfrac{1}{2\lambda}\ln\left(\dfrac{d_o}{d_i}\right)} \tag{b}$$

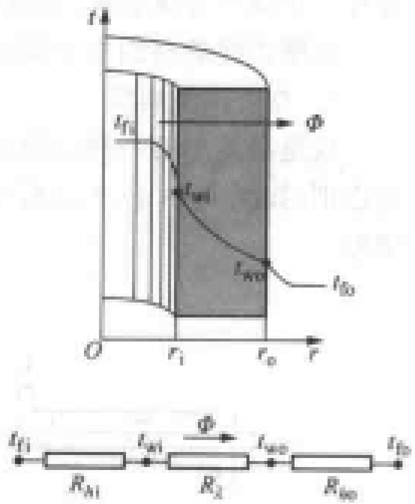


图 7.3　通过圆筒壁传热过程分析

壁外侧对流换热量：$\Phi=h_o\pi d_o l(t_{wo}-t_{fo})$　　(c)

三部分的热阻分别为

$$R_{hi}=\frac{1}{\pi l h_i d_i},\ R_\lambda=\frac{\ln(d_o/d_i)}{2\pi l\lambda},\ R_{ho}=\frac{1}{\pi l h_o d_o}$$

将(a),(b),(c)三式相加并整理可得

$$\Phi=\frac{\pi l(t_{fi}-t_{fo})}{\frac{1}{h_i d_i}+\frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{d_o}{d_i}\right)+\frac{1}{h_o d_o}}=K_o\pi d_o l(t_{fi}-t_{fo}) \tag{7-12}$$

从上式可得以外侧面积为基准的传热系数计算式

$$K_o=\frac{1}{\frac{d_o}{h_i d_i}+\frac{d_o}{2\lambda}\ln\left(\frac{d_o}{d_i}\right)+\frac{1}{h_o}} \tag{7-13}$$

注意在换热器工程应用计算时,习惯上传热系数都以管外侧面积为基准。在运行过程中,换热器管子的内、外侧常会有各种污垢,所以在设计计算中,要在式(7-13)中的分母中增加污垢热阻项,污垢热阻的数值可以从传热手册中选取。

7.3 换热器与传热的平均温差

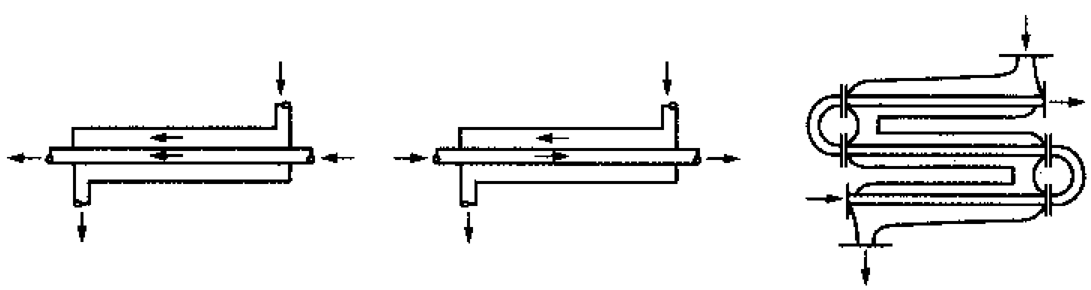
7.3.1 换热器简介

换热器是用来使热量从热流体传递到冷流体,以满足规定的工艺要求的装置。按照换热器操作过程可将其分为间壁式、混合式及蓄热式(也称回热式)三大类。间壁式换热器中冷、热流体由壁面间隔开来而分别位于壁面的两侧,通过冷、热流体的对流和壁面导热实现热量传递,是典型的传热过程。间壁式换热器在工程中应用最广泛,是本节讨论的主要对象。混合式换热器中冷、热流体通过直接接触、互相混合来实现换热,火力发电厂中的冷却塔、化工厂中的洗涤塔等都属于这类换热器。蓄热式换热器中冷、热流体依此交替地通过同一换热表面而实现热量交换。换热器的固体壁面除了换热外还起到蓄热的作用:即热流体流过时,固体壁面吸收并积蓄热量,然后释放给随后通过的冷流体,实现热量传递。显然,这个过程是非稳态传热过程。在空气分离装置、炼钢平炉中常采用这类换热器来预冷或预热空气。

间壁式换热器的主要型式有以下五种。

1. 套管式换热器

这是最简单的一种间壁式换热器,依两种流体的流动方向不同而又有顺流布置及逆流布置之别(如图 7.4(a),(b)所示)。这类间壁式换热器适用于传热量不大或流体流量不大的情形。



(a) (b) (c)

图 7.4 套管式换热器示意图

2. 壳管式换热器

间壁式换热器的一种主要形式，又称壳管式换热器。化工厂中的加热器、冷却器，电厂中的冷凝器、冷油器以及压缩机的中间冷却器等都是壳管式换热器的实例。

为了提高管外流体的流速，在如图7.5所示的换热器中，一端的封头里加了一块隔板，构成了两管程的结构，称为1-2型换热器(此处1表示壳程数，2表示管程数)。如图7.6所示是一个1-2型换热器的剖面图。图中管束采用U型管。这种结构形式的优点是可以避免因管子受热膨胀引起的热应力。在壳体两端封头里加装必要数目的隔板，还可得到4,6,8等多管程的结构。把几个壳程串联起来也能得到多壳程结构。

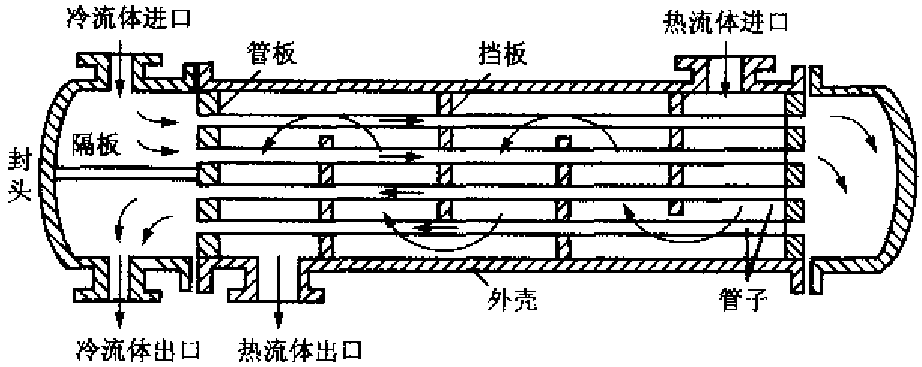


图7.5 简单的壳管式换热器示意图

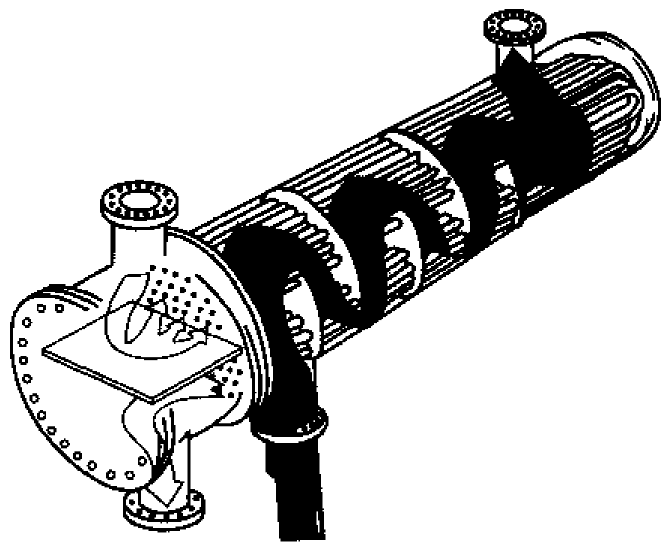
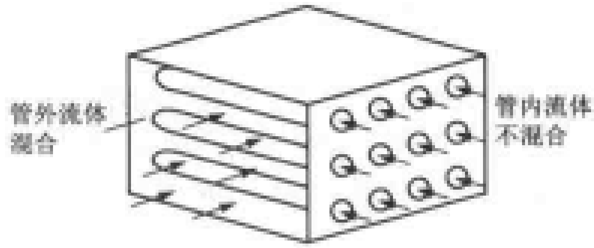


图7.6 1-2型换热器剖面示意图

3. 交叉流换热器

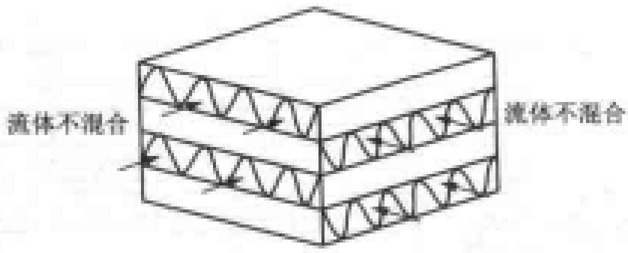
它是间壁式换热器的又一种主要形式。根据换热表面结构的不同又有管束式、管翅式及板翅式等的区别，如图7.7所示。锅炉装置中的蒸汽过热器、省煤器、空气预热器是管束式交叉流换热器的例子(图7.7(a))。交叉流换热器中流体各部分是否可以自由掺混，对于计算换热器的平均温差有一定的影响。在工程技术领域中，常以单位体积内所包含的换热面积作为衡量换热器紧凑程度的指标，并把这一指标大于$700m^2/m^3$的换热器称为紧凑式换热器；板翅式换热器多属于紧凑式，由于其单位体积内的换热量很大，在低温工程中广泛应用。



(a) 管束式交叉流换热器



(b) 管翅式交叉流换热器

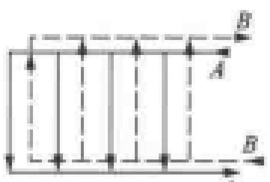


(c) 板翅式交叉流换热器

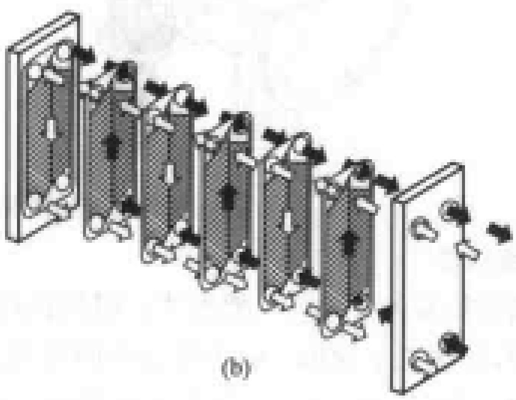
图 7.7　交叉流换热器示意图

4. 板式换热器

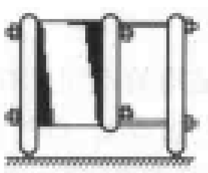
板式换热器由一组几何结构相同的平行薄平板叠加所组成，两相邻平板之间用特殊设计的密封垫片隔开，形成一个通道。冷、热流体间隔的在每个通道中流动。为强化换热并增加板片的刚度，常在平板上压制出各种波纹。板式换热器中冷、热流体的流动有多种布置方式，如图 7.8(a)所示为 1-1 型板式换热器的逆流布置，这里的 1-1 型表示冷、热流体都只流过一个通道。如图 7.8(b)所示是板式换热器换热表面的排列情形；图 7.8(c)所示是这种换热器的一种外形简图。板式换热器拆卸清洗方便，故适合于含有易结垢的流体(如牛奶等有机物)的换热。



(a)



(b)



(c)

图 7.8　板式换热器示意图

5. 螺旋板式换热器

螺旋板式换热器的换热表面系由两块金属板卷制而成，冷、热流体在螺旋状的通道中流动，如图 7.9 所示是其两个方向的界面示意图。这种换热器换热效果较好，缺点是换热器的密

封比较困难。

此外，还有螺旋管换热器(换热管弯制成连续的螺旋状)等也属于间壁式换热器。

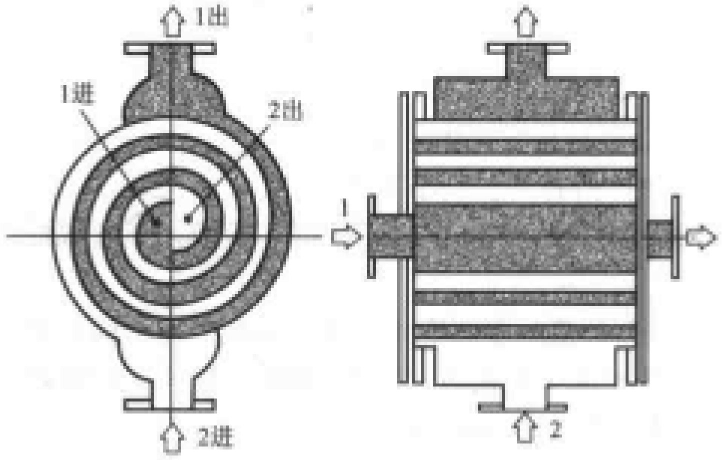


图 7.9 螺旋板式换热器

7.3.2 换热器传热的平均温差计算

以简单而又具有典型意义的套管式换热器为例，当利用传热方程式(7-12)来计算整个传热面的热流量时，必须使用整个传热面积上的平均温差，即平均温压 Δt_m。按照冷、热流体进出口安排的不同换热器可以有两种流动情况：两种流体逆方向流动的逆流以及两种流体同方向流动的顺流，如图 7.10(a)和图 7.10(b)所示。换热器内传热的共同特点是冷、热流体间的温差是不断变化的，如图 7.10(c)和图 7.10(d)所示。因此计算整个传热面的热流量 Φ 时，式(7-8)中的温差不是定值而必须采用一种整个面积上的平均温差(又称平均温压)Δt_m。据此，换热器适用的传热方程式具有下列形式：

$$\Phi = kA\Delta t_m W \tag{7-14}$$

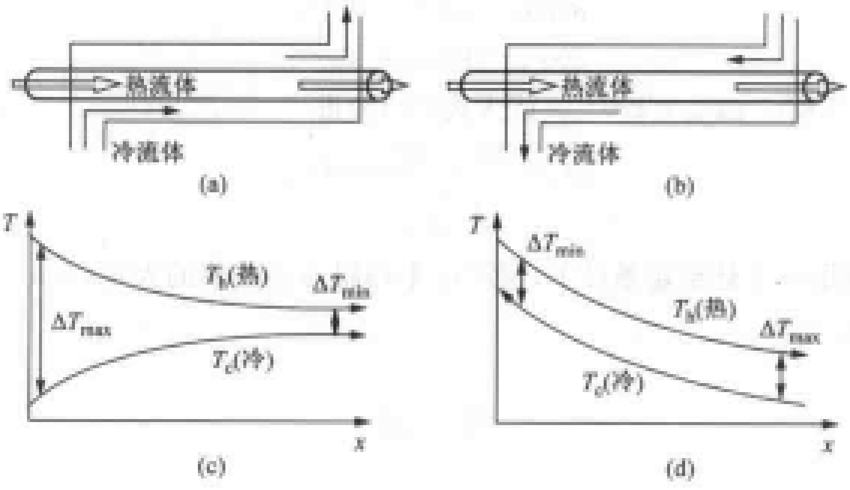


图 7.10 换热器种流体温度沿程变化示意图

逆流及顺流的平均温差的最终计算通式为：

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_{max} - \Delta t_{min}}{\ln \frac{\Delta t_{max}}{\Delta t_{min}}} \tag{7-15}$$

式中，Δt_{max}，Δt_{min}均是端温差，即同一端热流体与冷流体间的温差。Δt_{max}是端温差中较大的，而Δt_{min}是端温差中较小的。由于式(7-15)中出现了对数，因此Δt_m常被称为对数平均温差。

平均温差的另一种更为简单的形式是算术平均温差，即

$$\Delta t_{m,算术} = \frac{\Delta t_{max} + \Delta t_{min}}{2} \tag{7-16}$$

算术平均温差相当于温度呈直线变化的情况，因此，总是大于相同进出口温度下的对数平均温差，当$\Delta t_{max}/\Delta t_{min} \leqslant 2$时，两者的差别小于4%；当$\Delta t_{max}/\Delta t_{min} \leqslant 1.7$时，两者的差别小于2.3%。所以，在工程计算当中，$\Delta t_{max}/\Delta t_{min} \leqslant 2$时容许采用算术平均温差，而$\Delta t_{max}/\Delta t_{min} > 2$时应采用对数平均温差$\Delta t_m$。

实际上的换热器除逆流、顺流的双套管式之外。还有多种结构和复杂的流动安排。就平均温差而论，逆流和顺流代表两个极端值，其余各种换热器的平均温差介于这两个极端值之间。限于篇幅，本书对具体计算方法不做介绍。

例7-2 平均温差的计算

已知：在如图7.10所示的双套管式换热器中，热流体进口温度为800℃、出口温度为500℃，而冷流体的进口温度为100℃、出口温度为300℃。试求：(1)顺流方案的平均温差；(2)逆流方案的平均温差。

解：(1) 对于顺流，端温差分别为

$$800℃ - 100℃ = 700℃$$
$$300℃ - 100℃ = 200℃$$

于是$\Delta t_{max} = 700℃$，$\Delta t_{min} = 200℃$。代入式(7-15)得

$$\Delta t_m = \frac{700-200}{\ln\frac{700}{200}} = 399℃$$

(2) 对于逆流，端温差分别为

$$800℃ - 300℃ = 500℃$$
$$500℃ - 100℃ = 400℃$$

于是$\Delta t_{max} = 500℃$，$\Delta t_{min} = 400℃$。代入式(7-15)得

$$\Delta t_m = \frac{500-400}{\ln\frac{500}{400}} = 448℃$$

上述计算表明，在上述给定条件下，逆流的平均温差比顺流的大12.3%。这表明逆流方案传热更为有效。

习　题

1. 一卧式冷凝器采用外径为25mm、壁厚1.5mm的黄铜管做成换热表面。管外冷凝侧的h_o=5 700W/(m^2·K)，管内水侧h_i=4 300W/(m^2·K)。假设：(1)管子内外表面均是洁净的；(2)管内为海水，流速大于1m/s，结水垢，平均温度小于50℃，蒸汽侧有油。试计算不同情况下，冷凝器按管子外表面面积计算的总传热系数。

2. 一套管式换热器长2m，外壳内径为6cm，内管外直径为4cm，厚3mm。内管中流过冷

却水，平均温度为40℃，流量为0.0016m^3/s。14号润滑油以平均温度70℃流过环形空间，流量为0.005m^3/s。冷却水系经处理的冷却塔水，管壁材料为黄铜。试计算，内外壁面均洁净及长时间运行结垢后的总传热系数值。

3. 一种用于制冷剂凝结换热的双侧强化管用直径为19/16.4mm的胚管加工制造而成，长1.0m。在一次实验中测得冷却水进出口温度分别为24.6℃及29.7℃，平均水速为0.91m/s，按胚管尺寸计算的管内平均表面传热系数为1.82×10^4W/($m^2\cdot$K)，管外凝结换热表面传热系数为1.25×10^4W/($m^2\cdot$K)，管材为铜。试计算，按胚管外表面计算的总传热系数值，并分析管内水侧采用强化表面后的强化效果。

4. 已知$t_1'=300$℃，$t_1''=210$℃，$t_2'=100$℃，$t_2''=200$℃。(1)逆流布置；(2)1-2型壳管式，热流体在壳侧；(3)顺流布置。试求，以上几种布置时换热器的对数平均温差。

主要符号表

符号	意义
a	热扩散率,m^2/s
c	声速,m/s
b	通道半宽,m
c_p	质量定压热容,J/(kg · K)
c_f	摩擦阻力系数
C	水当量比
d	间距,直径,m
D	直径,管径,m
f	摩擦因子
F	力,N
F	冲量函数,N · s
g	重力加速度,m/s^2
G	质量流量,kg/s
h	对流传热系数,W/(m^2 · ℃)
h	比焓,J/ kg
H	焓,J
j	电流密度,A/m^2
k	波数
K	总传热系数,W/(m^2 · ℃)
l	长度,m
m	质量,kg
$\dot{m}$	质量速度,kg/(m^2 · s)
M	气体分子量,kg
p	压力,Pa
q	热流密度,W/ m^2
$\dot{q}$	热源密度,W/ m^3
Q	热流量,W
r	半径,m
s	比熵,J/(kg · K)
S	熵,J/K
t	时间,s
T	温度,K
u,v,w	在 x,y,z 坐标方向的速度分量,m/s
U	速度,m/s
U	内能,J
v	比容,m^3/kg
V	速度,m/s
W	功,J
Z	压缩因子

希腊字母

符号	意义
α	传热系数(放热系数,给热系数),W/(m^2 · K)
α	吸收率
β	体膨胀系数,1/K
γ	绝热指数
δ	厚度,边界层厚度,m
ε	黑度
ε	换热器效能
ε_m	紊流粘性系数,N · m/ s^2
η	热力学效率
θ	无因次温度
θ	过余温度,℃
λ	热导率,W/(m · K)
λ	波长,μm
$\tilde{\lambda}$	平均自由程,m
μ	动力粘度,·s
ν	运动粘度,m^2/ s
ρ	密度,kg/ m^3
σ	表面张力,N/m
σ_0	黑体辐射常数,W/(m^2 · K^4)
τ	切应力,N/ m^2
τ	时间,s
τ	穿透率
ψ	流函数,m^2/s
ω	频率,1/s

ω	无因次角速度
ω	立体角，sr
Ω	角速度，rad /s

下标

a	绝热，上部
b	背部，下部
c	常物性，可压缩，冷
cr	临界
f	流体，摩擦
g	气体
m	平均，最大，动量
r	径向
s	等熵
w	壁面
x	沿 x 方向
∞	来流

特征数

$Bi=\frac{\alpha l}{\lambda}$——毕渥数

$Eu=\frac{\Delta p}{\rho v^2}$——欧拉数

$Fo=\frac{a\tau}{l^2}$——傅里叶数

$Gr=\frac{l^3 g\alpha\Delta T}{\nu^2}$——格拉晓夫数

$Ma=\frac{v}{c}$——马赫数

$Nu=\frac{hl}{\lambda}$——努塞尔数

$Pe=RePr\frac{\rho C_p vl}{\lambda}=\frac{vl}{a}$——贝克来数

$Pr=\frac{v}{a}$——普朗特数

$Ra=G_r P_r\frac{l^3\rho^2 c_p g\alpha\Delta T}{\eta\lambda}=\frac{l^3 g\alpha\Delta T}{va}$——瑞利数

$Re=\frac{ul}{v}=\frac{\rho vl}{\eta}$——雷诺数

附　　录

附录 1　常用单位换算表

物理量名称	符　号	换算系数		
		法定计量单位	工程单位	
压力	p	Pa	atm	
		1	$9.869\,23\times10^{-6}$	
		$1.013\,25\times10^{5}$	1	
运动粘度	v	m^2/s	m^2/s	
		1	1	
		0.092 903	0.092 903	
动力粘度	μ	$kg/(m\cdot s)(N\cdot s/m^2)$	$kgf\cdot s/m^2$	
		1	0.101 972	
		9.806 65	1	
比热容	c	kJ/(kg·℃)	kcal/(kgf·℃)	
		1	0.238 846	
		4.186 8	1	
热流密度	q	W/m^2	$kcal/(m^2\cdot h)$	
		1	0.859 845	
		1.163	1	
导热系数	λ	W/(m·℃)	kcal/(m·h·℃)	
		1	0.859 845	
		1.163	1	
表面传热系数 传热系数	h k	$W/(m^2\cdot ℃)$	$kcal/(m^2\cdot h\cdot ℃)$	
		1	0.859 845	
		1.163	1	
功　率 热流量	N Q	W	kcal/h	$kgf\cdot m/s$
		1	0.859 845	0.101 972
		1.163	1	0.118 583
		9.806 65	8.433 719	1

附录 2　金属材料的密度、比热容和导热系数

材料名称	20℃			热导率 λ/[W/(m·℃)]									
	密度	比热容	热导率	温度/℃									
	ρ / kg/m^3	c_p / J/(kg·℃)	λ / W/(m·℃)	−100	0	100	200	300	400	600	800	1 000	1 200
纯铝	2 710	902	236	243	236	240	238	234	228	215			
杜拉铝(96Al-4Cu,微量 Mg)	2 790	881	169	124	160	188	188	193					
铝合金(92Al-8Mg)	2 610	904	107	86	102	123	148						

（续表）

材料名称	20℃			热导率λ/[W/(m·℃)]									
	密度	比热容	热导率	温度/℃									
	$\frac{\rho}{kg/m^3}$	$\frac{c_p}{J/(kg\cdot℃)}$	$\frac{\lambda}{W/(m\cdot℃)}$	−100	0	100	200	300	400	600	800	1 000	1 200
铝合金(87Al-13Si)	2 660	871	162	139	158	173	176	180					
铍	1 850	1 758	219	382	218	170	145	129	118				
纯铜	8 930	386	398	421	401	393	389	384	379	366	352		
铝青铜(90Cu-10Al)	8 360	420	56		49	57	66						
青铜(89Cu-11Sn)	8 800	343	24.8		24	28.4	33.2						
黄铜(70Cu-30Zn)	8 440	377	109	90	106	131	143	145	148				
铜合金(60Cu-40Ni)	8 920	410	22.2	19	22.2	23.4							
黄金	19 300	127	315	331	318	313	310	305	300	287			
纯铁	7 870	455	81.1	96.7	83.5	72.1	63.5	56.5	50.3	39.4	29.6	29.4	31
阿姆口铁	7 860	455	73.2	82.9	74.7	67.5	61.0	54.8	49.9	38.6	29.3	29.3	31.1
灰铸铁(w_C≈3%)	7 570	470	39.2		28.5	32.4	35.8	37.2	36.6	20.8	19.2		
碳钢(w_C≈0.5%)	7 840	465	49.8		50.5	47.5	44.8	42.0	39.4	34.0	29.0		
碳钢(w_C≈1.0%)	7 790	470	43.2		43.0	42.8	42.2	41.5	40.6	36.7	32.2		
碳钢(w_C≈1.5%)	7 750	470	36.7		36.8	36.6	36.2	35.7	34.7	31.7	27.8		
铬钢(w_{Cr}≈5%)	7 830	460	36.1		36.3	35.2	34.7	33.5	31.4	28.0	27.2	27.2	27.2
铬钢(w_{Cr}≈13%)	7 740	460	26.8		26.5	27.0	27.0	27.0	27.6	28.4	29.0	29.0	
铬钢(w_{Cr}≈17%)	7 710	460	22		22	22.2	22.6	22.6	23.3	24.0	24.8	25.5	
铬钢(w_{Cr}≈26%)	7 650	460	22.6		22.6	23.8	25.5	27.2	28.5	31.8	35.1	38	
铬镍钢(18-20Cr/8-12Ni)	7 820	460	15.2	12.2	14.7	16.6	18.0	19.4	20.8	23.5	26.3		
铬镍钢(17-19Cr/9-13Ni)	7 830	460	14.7	11.8	14.3	16.1	17.5	18.8	20.2	22.8	25.5	28.2	30.9
镍钢(w_{Ni}≈1%)	7 900	460	45.5	40.8	45.2	46.8	46.1	44.1	41.2	35.7			
镍钢(w_{Ni}≈3.5%)	7 910	460	36.5	30.7	36.0	38.8	39.7	39.2	37.8				
镍钢(w_{Ni}≈25%)	8 030	460	13.0										
镍钢(w_{Ni}≈35%)	8 110	460	13.8	10.9	13.4	15.4	17.1	18.6	20.1	23.1			
镍钢(w_{Ni}≈44%)	8 190	460	15.8		15.7	16.1	16.5	16.9	17.1	17.8	18.4		
镍钢(w_{Ni}≈50%)	8 260	460	19.6	17.3	19.4	20.5	21.0	21.1	21.3	22.5			
锰钢(w_{Mn}≈12%～13%，wNi≈3%)	7 800	487	13.6			14.8	16.0	17.1	18.3				
锰钢(w_{Mn}≈0.4%)	7 860	440	51.2			51.0	50.0	47.0	43.5	35.5	27		
钨钢(w_W≈5%～6%)	8 070	436	18.7		18.4	19.7	21.0	22.3	23.6	24.9	26.3		
铅	11 340	128	35.3	37.2	35.5	34.3	32.8	31.5					
镁	1 730	1 020	156	160	157	154	152	150					
钼	9 590	255	138	146	139	135	131	127	123	116	109	103	93.7
镍	8 900	444	91.4	144	94	82.8	74.2	67.3	64.6	60.0	73.3	77.6	81.9
铂	21 450	133	71.4	73.3	71.5	71.6	72.0	72.8	73.6	76.6	80.0	84.2	88.9
银	10 500	234	427	431	428	422	415	407	399	384			
锡	7 310	228	67	75	68.2	63.2	60.9						

（续表）

材料名称	20℃			热导率 λ/[W/(m·℃)]									
	密度	比热容	热导率	温度/℃									
	$\frac{\rho}{kg/m^3}$	$\frac{c_p}{J/(kg\cdot℃)}$	$\frac{\lambda}{W/(m\cdot℃)}$	−100	0	100	200	300	400	600	800	1 000	1 200
钛	4 500	520	22	23.3	22.4	20.7	19.9	19.5	19.4	19.9			
铀	19 070	116	27.4	24.3	27	29.1	31.1	33.4	35.7	40.6	45.6		
锌	7 140	388	121	123	122	117	112						
锆	6 570	276	22.9	26.5	23.2	21.8	21.2	20.9	21.4	22.3	24.5	26.4	28.0
钨	19 350	134	179	204	182	166	153	142	134	125	119	114	110

附录 3　保温、建筑及其他材料的密度和导热系数

材料名称	温度 t/℃	密度 ρ/(kg·m^{-3})	导热系数 λ/[W/(m·℃)]	材料名称	温度 t/℃	密度 ρ/(kg·m^{-3})	导热系数 λ/[W/(m·℃)]
膨胀珍珠岩散料	25	60～300	0.021～0.062	玻璃丝	35	120～492	0.058～0.07
沥青膨胀珍珠岩	31	233～282	0.069～0.076	玻璃棉毡	28	18.4～38.3	0.043
磷酸盐膨胀珍珠岩制品	20	200～250	0.044～0.052	软木板	20	105～437	0.044～0.079
				木丝纤维板	25	245	0.048
水玻璃膨胀珍珠岩制品	20	200～300	0.056～0.065	稻草浆板	20	325～365	0.068～0.084
				麻杆板	25	108～147	0.056～0.11
岩棉制品	20	80～150	0.035～0.038	甘蔗板	20	282	0.067～0.072
膨胀蛭石	20	100～130	0.051～0.07	葵芯板	20	95.5	0.05
沥青蛭石板管	20	350～400	0.081～0.10	红砖(营造状态)	25	1 860	0.87
玉米梗板	22	25.2	0.065	红砖	35	1560	0.49
棉花	20	117	0.048	松木(垂直木纹)	15	496	0.15
丝	20	57.7	0.036	松木(平行木纹)	21	527	0.35
锯木屑	20	179	0.083	水泥	30	1 900	0.30
硬泡沫塑料	30	29.5～56.3	0.041～0.048	混凝土板	35	1 930	0.79
软泡沫塑料	30	41～162	0.043～0.056	耐酸混凝土板	30	2 250	1.5～1.6
铝箔间隔层(5 层)	21		0.042	黄砂	30	1 580～1 700	0.28～0.34
石棉粉	22	744～1400	0.099～0.19	泥土	20		0.83
石棉砖	21	384	0.099	瓷砖	37	2 000	1.1
石棉绳		590～730	0.10～0.21	玻璃	45	2 500	0.65～0.71
石棉绒		35～230	0.055～0.077	聚苯乙烯	30	24.7～37.8	0.04～0.043
石棉板	30	770～1045	0.10～0.14	花岗石		2 643	1.73～3.98
碳酸镁石棉灰		240～490	0.077～0.086	大理石		2 499～2 707	2.70
硅藻土石棉灰		280～380	0.085～0.11	云母		290	0.58
粉煤灰砖	27	458～589	0.12～0.22	水垢	65		1.31～3.14
矿渣棉	30	207	0.058	冰	0	913	2.22

附录 4　几种保温、耐火材料的导热系数与温度的关系

材料名称	材料最高耐温 t/℃	密度 ρ/(kg/m^3)	导热系数 λ[W/(m·℃)]
超细玻璃棉毡、管	400	18～20	$0.033+0.000\ 23t$[①]
矿渣棉	550～600	350	$0.067\ 4+0.000\ 215t$
水泥蛭石制品	800	420～450	$0.103+0.000\ 198t$

（续表）

材料名称	材料最高耐温 t/℃	密度 ρ/(kg/m³)	导热系数 λ[W/(m·℃)]
水泥珍珠岩制品	600	300～400	0.065 1+0.000 105t
粉煤灰泡沫砖	300	500	0.099+0.000 2t
岩棉玻璃布缝板	600	100	0.031 4+0.000 198t
A级硅藻土制品	900	500	0.039 5+0.000 19t
B级硅藻土制品	900	550	0.047 7+0.000 2t
膨胀珍珠岩	1 000	55	0.042 4+0.000 137t
微孔硅酸钙制品	650	≯250	0.041+0.000 2t
耐火粘土砖	1 350～1 450	1 800～2 040	(0.7～0.84)+0.000 58t
轻质耐火粘土砖	1 250～1 300	800～1 300	(0.29～0.41)+0.000 26t
超轻质耐火粘土砖	1 150～1 300	540～610	0.093+0.000 16t
超轻质耐火粘土砖	1 100	270～330	0.058+0.000 17t
硅砖	1 700	1 900～1 950	0.93+0.000 7t
镁砖	1 600～1700	2 300～2 600	2.1+0.000 19t
铬砖	1 600～1 700	2 600～2 800	4.7+0.000 17t

① t表示材料的平均温度。

附录5　干空气的热物理性质(p=1.01325×10⁵ pa)①

$\frac{t}{℃}$	$\frac{\rho}{kg/m^3}$	$\frac{c_p}{kJ/(kg\cdot K)}$	$\frac{\lambda\times10^2}{W/(m\cdot K)}$	$\frac{\alpha\times10^6}{m^2/s}$	$\frac{\mu\times10^6}{kg/(m\cdot s)}$	$\frac{\nu\times10^6}{m^2/s}$	Pr
−50	1.584	1.013	2.04	12.7	14.6	9.23	0.728
−40	1.515	1.013	2.12	13.8	15.2	10.04	0.728
−30	1.453	1.013	2.20	14.9	15.7	10.80	0.723
−20	1.395	1.009	2.28	16.2	16.2	11.61	0.716
−10	1.342	1.009	2.36	17.4	16.7	12.43	0.712
0	1.293	1.005	2.44	18.8	17.2	13.28	0.707
10	1.247	1.005	2.51	20.0	17.6	14.16	0.705
20	1.205	1.005	2.59	21.4	18.1	15.06	0.703
30	1.165	1.005	2.67	22.9	18.6	16.00	0.701
40	1.128	1.005	2.76	24.3	19.1	16.96	0.699
50	1.093	1.005	2.83	25.7	19.6	17.95	0.698
60	1.060	1.005	2.90	27.2	20.1	18.97	0.696
70	1.029	1.009	2.96	28.6	20.6	20.02	0.694
80	1.000	1.009	3.05	30.2	21.1	21.09	0.692
90	0.972	1.009	3.13	31.9	21.5	22.10	0.690
100	0.946	1.009	3.21	33.6	21.9	23.13	0.688
120	0.898	1.009	3.34	36.8	22.8	25.45	0.686
140	0.854	1.013	3.49	40.3	23.7	27.80	0.684
160	0.815	1.017	3.64	43.9	24.5	30.09	0.682
180	0.779	1.022	3.78	47.5	25.3	32.49	0.681
200	0.746	1.026	3.93	51.4	26.0	34.85	0.680
250	0.674	1.038	4.27	61.0	27.4	40.61	0.677
300	0.615	1.047	4.60	71.6	29.7	48.33	0.674

（续表）

$\frac{t}{℃}$	$\frac{\rho}{kg/m^3}$	$\frac{c_p}{kJ/(kg\cdot K)}$	$\frac{\lambda\times10^2}{W/(m\cdot K)}$	$\frac{a\times10^6}{m^2/s}$	$\frac{\mu\times10^6}{kg/(m\cdot s)}$	$\frac{\nu\times10^6}{m^2/s}$	Pr
350	0.566	1.059	4.91	81.9	31.4	55.46	0.676
400	0.524	1.068	5.21	93.1	33.0	63.09	0.678
500	0.456	1.093	5.74	115.3	36.2	79.38	0.687
600	0.404	1.114	6.22	138.3	39.1	96.89	0.699
700	0.362	1.135	6.71	163.4	41.8	115.4	0.706
800	0.329	1.156	7.18	188.8	44.3	134.8	0.713
900	0.301	1.172	7.63	216.2	46.7	155.1	0.717
1 000	0.277	1.185	8.07	245.9	49.0	177.1	0.719
1 100	0.257	1.197	8.50	276.2	51.2	199.3	0.722
1 200	0.239	1.210	9.15	316.5	53.5	233.7	0.724

① $1.01325\times10^5 pa=760mmHg$，下同。

附录 6　在大气压力（p＝1.01325×10^5 Pa）下烟气的热物理性质

（烟气中组成成分的质量分数：$w_{CO_2}=0.13$；$w_{H_2O}=0.11$；$w_{N_2}=0.76$）

$\frac{t}{℃}$	$\frac{\rho}{kg/m^3}$	$\frac{c_p}{kJ/(kg\cdot K)}$	$\frac{\lambda\times10^2}{W/(m\cdot K)}$	$\frac{a\times10^6}{m^2/s}$	$\frac{\eta\times10^6}{kg/(m\cdot s)}$	$\frac{\nu\times10^6}{m^2/s}$	Pr
0	1.295	1.042	2.28	16.9	15.8	12.20	0.72
100	0.950	1.068	3.13	30.8	20.4	21.54	0.69
200	0.748	1.097	4.01	48.9	24.5	32.80	0.67
300	0.617	1.122	4.84	69.9	28.2	48.81	0.65
400	0.525	1.151	5.70	94.3	31.7	60.38	0.64
500	0.457	1.185	6.56	121.1	34.8	76.30	0.63
600	0.405	1.214	7.42	150.9	37.9	93.61	0.62
700	0.363	1.239	8.27	183.8	40.7	112.1	0.61
800	0.330	1.234	9.15	219.7	43.4	131.8	0.60
900	0.301	1.290	10.00	258.0	45.9	152.5	0.59
1 000	0.275	1.306	10.90	303.4	48.4	174.3	0.58
1 100	0.257	1.323	11.75	345.5	50.7	197.1	0.57
1 200	0.240	1.340	12.62	392.4	53.0	221.0	0.56

附录 7　饱和水的热物理性质①

$\frac{t}{℃}$	$\frac{P\times10^{-5}}{Pa}$	$\frac{\rho}{kg/m^3}$	$\frac{h'}{kJ/kg}$	$\frac{c_p}{kJ(kg\cdot ℃)}$	$\frac{\lambda\times10^2}{W/(m\cdot ℃)}$	$\frac{a\times10^8}{m^2/s}$	$\frac{\mu\times10^6}{kg/(m\cdot s)}$	$\frac{\nu\times10^6}{m^2/s}$	$\frac{\alpha_V\times10^4}{K^{-1}}$	$\frac{\gamma\times10^4}{N/m}$	Pr
0	0.006 11	999.9	0	4.212	55.1	13.1	1 788	1.789	−0.81	756.4	13.67
10	0.012 270	999.7	42.04	4.191	57.4	13.7	1 306	1.306	+0.87	741.6	9.52
20	0.023 38	998.2	83.91	4.183	59.9	14.3	1 004	1.006	2.09	726.9	7.02
30	0.042 41	995.7	125.7	4.174	61.8	14.9	801.5	0.805	3.05	712.2	5.42
40	0.073 75	992.2	167.5	4.174	63.5	15.3	653.3	0.659	3.86	696.5	4.31
50	0.123 35	988.1	209.3	4.174	64.8	15.7	549.4	0.556	4.57	676.9	3.54
60	0.199 20	983.1	251.1	4.179	65.9	16.0	469.9	0.478	5.22	662.2	2.99
70	0.311 6	977.8	293.0	4.187	66.8	16.3	406.1	0.415	5.83	643.5	2.55
80	0.473 6	971.8	355.0	4.195	67.4	16.6	355.1	0.365	6.40	625.9	2.21

（续表）

$\frac{t}{℃}$	$\frac{P\times10^{-5}}{Pa}$	$\frac{\rho}{kg/m^3}$	$\frac{h'}{kJ/kg}$	$\frac{c_p}{kJ(kg\cdot℃)}$	$\frac{\lambda\times10^2}{W/(m\cdot℃)}$	$\frac{a\times10^8}{m^2/s}$	$\frac{\mu\times10^6}{kg/(m\cdot s)}$	$\frac{\nu\times10^6}{m^2/s}$	$\frac{\alpha_V\times10^4}{K^{-1}}$	$\frac{\gamma\times10^4}{N/m}$	Pr
90	0.7011	965.3	377.0	4.208	68.0	16.8	314.9	0.326	6.96	607.2	1.95
100	1.013	958.4	419.1	4.220	68.3	16.9	282.5	0.295	7.50	588.6	1.75
110	1.43	951.0	461.4	4.233	68.5	17.0	259.0	0.272	8.04	569.0	1.60
120	1.98	943.1	503.7	4.250	68.6	17.1	237.4	0.252	8.58	548.4	1.47
130	2.70	934.8	546.4	4.266	68.6	17.2	217.8	0.233	9.12	528.8	1.36
140	3.61	926.1	589.1	4.287	68.5	17.2	201.1	0.217	9.68	507.2	1.26
150	4.76	917.0	632.2	4.313	68.4	17.3	186.4	0.203	10.26	486.6	1.17
160	6.18	907.0	675.4	4.346	68.3	17.3	173.6	0.191	10.87	466.0	1.10
170	7.92	897.3	719.3	4.380	67.9	17.3	162.8	0.181	11.52	443.4	1.05

① αv 值选自 *Steam Tables in SI Units*, *2nd Ed.*, *Ed. by Grigull*, *U. et. al.*, *Springer-Verlag*, 1984.

附录 8　几种饱和液体的热物理性质

液体	$\frac{t}{℃}$	$\frac{\rho}{kg/m^3}$	$\frac{c_p}{kJ/(kg\cdot℃)}$	$\frac{\lambda}{W/(m\cdot℃)}$	$\frac{a\times10^8}{m^2/s}$	$\frac{\nu\times10^6}{m^2/s}$	$\frac{\alpha_V\times10^3}{K^{-1}}$	Pr
氨 (NH_3)	−50	703.69	4.463	0.547	17.42	0.435	1.69	2.60
	−40	691.68	4.467	0.547	17.75	0.406	1.78	2.28
	−30	679.34	4.476	0.549	18.01	0.387	1.88	2.15
	−20	666.69	4.509	0.547	18.19	0.381	1.96	2.09
	−10	653.55	4.564	0.543	18.25	0.378	2.04	2.07
	0	640.10	4.635	0.540	18.19	0.373	2.16	2.05
	10	626.16	4.714	0.531	18.01	0.368	2.28	2.04
	20	611.75	4.798	0.521	17.75	0.359	2.42	2.02
	30	596.37	4.890	0.507	17.42	0.349	2.57	2.01
	40	580.99	4.999	0.493	17.01	0.340	2.76	2.00
	50	564.33	5.116	0.476	16.54	0.330	3.07	1.99
氟利昂 12 (CCl_2F_2)	−50	1546.75	0.8750	0.067	5.01	0.310		6.2
	−40	1518.71	0.8847	0.069	5.14	0.279	1.83	5.4
	−30	1489.56	0.8956	0.069	5.26	0.253	1.93	4.8
	−20	1460.57	0.9073	0.071	5.39	0.235	2.05	4.4
	−10	1429.49	0.9203	0.073	5.50	0.221	2.19	4.0
	0	1397.45	0.9345	0.073	5.57	0.214	2.35	3.8
	10	1364.30	0.9496	0.073	5.60	0.203	2.53	3.6
	20	1330.18	0.9659	0.073	5.60	0.198	2.71	3.5
	30	1295.10	0.9835	0.071	5.60	0.194	2.91	3.5
	40	1257.13	1.0019	0.069	5.55	0.191	3.19	3.5
	50	1215.96	1.0216	0.067	5.45	0.190		3.5
11 号润滑油①	0	905.0	1.834	0.1449	8.73	1336		15310
	10	898.8	1.872	0.1441	8.56	564.2		6591
	20	892.7	1.909	0.1432	8.40	280.2	0.69	3335
	30	886.6	1.947	0.1423	8.24	153.2		1859
	40	880.6	1.985	0.1414	8.09	90.7		1121

（续表）

液体	$\frac{t}{℃}$	$\frac{\rho}{kg/m^3}$	$\frac{c_p}{kJ/(kg\cdot℃)}$	$\frac{\lambda}{W/(m\cdot℃)}$	$\frac{a\times10^8}{m^2/s}$	$\frac{\nu\times10^6}{m^2/s}$	$\frac{\alpha_V\times10^3}{K^{-1}}$	Pr
11号润滑油①	50	874.6	2.022	0.1405	7.94	57.4		723
	60	868.8	2.064	0.1396	7.78	38.4		493
	70	863.1	2.106	0.1387	7.63	27.0		354
	80	857.4	2.148	0.1379	7.49	19.7		263
	90	851.8	2.190	0.1370	7.34	14.9		203
	100	846.2	2.236	0.1361	7.19	11.5		160
14号润滑油①	0	905.2	1.866	0.1493	8.84	2237		25310
	10	899.0	1.909	0.1485	8.65	863.2		9979
	20	892.8	1.915	0.1477	8.48	410.9	0.69	4846
	30	886.7	1.993	0.1470	8.32	216.5		2603
	40	880.7	2.035	0.1462	8.16	124.2		1522
	50	874.8	2.077	0.1454	8.00	76.5		956
	60	869.0	2.114	0.1446	7.87	50.5		462
	70	863.2	2.156	0.1439	7.73	34.3		444
	80	857.5	2.194	0.1431	7.61	24.6		323
	90	851.9	2.227	0.1424	7.51	18.3		224
	100	846.4	2.265	0.1416	7.39	14.0		190

取自同济大学对上海炼油厂产品的测定数据

附录9 双曲线函数值

χ	shχ	chχ	thχ	χ	shχ	chχ	thχ
0.0	0.0000	1.0000	0.0000	3.0	10.0179	10.0678	0.9951
0.1	0.1002	1.0050	0.0997	3.1	11.0765	11.1215	0.9960
0.2	0.2013	1.0201	0.1974	3.2	12.2459	12.2866	0.9967
0.3	0.3045	1.0453	0.2913	3.3	13.5379	13.5748	0.9973
0.4	0.4108	1.0811	0.3799	3.4	14.965	14.999	0.9978
0.5	0.5211	1.1276	0.4621	3.5	16.543	16.573	0.9982
0.6	0.6367	1.1855	0.5371	3.6	18.285	18.313	0.9985
0.7	0.7586	1.2552	0.6044	3.7	20.211	20.236	0.9988
0.8	0.8881	1.3374	0.6640	3.8	22.329	22.362	0.9990
0.9	1.0265	1.4331	0.7163	3.9	24.691	24.711	0.9992
1.0	1.1752	1.5431	0.7616	4.0	27.290	27.308	0.9993
1.1	1.3356	1.6685	0.8010	4.1	30.162	30.178	0.9995
1.2	1.5095	1.8107	0.8337	4.2	33.336	33.351	0.9996
1.3	1.6984	1.9709	0.8617	4.3	36.843	36.857	0.9996
1.4	1.9043	2.1509	0.8854	4.4	40.719	40.732	0.9997
1.5	2.1293	2.3524	0.9052	4.5	45.003	45.014	0.9998
1.6	2.3756	2.5775	0.9217	4.6	49.737	49.747	0.9998
1.7	2.6456	2.8283	0.9354	4.7	54.969	54.978	0.9999
1.8	2.9422	3.1075	0.9468	4.8	60.751	60.759	0.9999
1.9	3.2682	3.4177	0.9562	4.9	67.141	67.149	0.9999

（续表）

χ	shχ	chχ	thχ	χ	shχ	chχ	thχ
2.0	3.6269	3.7622	0.9640	5.0	74.203	74.210	0.9999
2.1	4.0219	4.1443	0.9704	5.1	82.008	82.014	0.9999
2.2	4.4571	4.5679	0.9757	5.2	90.633	90.639	0.9999
2.3	4.9370	5.0372	0.9801	5.3	100.166	100.171	1.0000
2.4	5.4662	5.5570	0.9837	5.4	110.701	110.705	1.0000
2.5	6.0502	6.1323	0.9866	5.5	122.344	122.344	1.0000
2.6	6.6947	6.7690	0.9890	5.6	135.211	135.211	1.0000
2.7	7.4063	7.4735	0.9910	5.7	149.432	149.432	1.0000
2.8	8.1919	8.2527	0.9926	5.8	165.148	165.148	1.0000
2.9	9.0596	9.1146	0.9940	5.9	182.517	182.517	1.0000

附录 10　高斯误差函数值

N	f(N)	N	f(N)	N	f(N)
0.00	0.00000	0.76	0.71754	1.52	0.96841
0.02	0.02256	0.78	0.73001	1.54	0.97059
0.04	0.04511	0.80	0.74210	1.56	0.97263
0.06	0.06762	0.82	0.75381	1.58	0.97455
0.08	0.09008	0.84	0.76514	1.60	0.97635
0.10	0.11246	0.86	0.77610	1.62	0.97804
0.12	0.13476	0.88	0.78669	1.64	0.97962
0.14	0.15695	0.90	0.79691	1.66	0.98110
0.16	0.17901	0.92	0.80677	1.68	0.98249
0.18	0.20094	0.94	0.81627	1.70	0.98379
0.20	0.22270	0.96	0.82542	1.72	0.98500
0.22	0.24430	0.98	0.83423	1.74	0.98613
0.24	0.26570	1.00	0.84270	1.76	0.98719
0.26	0.28690	1.02	0.85084	1.78	0.98817
0.28	0.30788	1.04	0.85865	1.80	0.98909
0.30	0.32863	1.06	0.86614	1.82	0.98994
0.32	0.34913	1.08	0.87333	1.84	0.99074
0.34	0.36936	1.10	0.88020	1.86	0.99147
0.36	0.38933	1.12	0.88679	1.88	0.99216
0.38	0.40901	1.14	0.89308	1.90	0.99279
0.40	0.42839	1.16	0.89910	1.92	0.99338
0.42	0.44749	1.18	0.90484	1.94	0.99392
0.44	0.46622	1.20	0.91031	1.96	0.99443
0.46	0.48466	1.22	0.91553	1.98	0.99489
0.48	0.50275	1.24	0.92050	2.00	0.995322
0.50	0.52050	1.26	0.92524	2.10	0.997020
0.52	0.53790	1.28	0.92973	2.20	0.998137

（续表）

N	$f(N)$	N	$f(N)$	N	$f(N)$
0.54	0.554 94	1.30	0.934 01	2.30	0.998 857
0.56	0.571 62	1.32	0.938 06	2.40	0.999 311
0.58	0.587 92	1.34	0.941 91	2.50	0.999 593
0.60	0.603 86	1.36	0.945 56	2.60	0.999 764
0.62	0.619 41	1.38	0.949 02	2.70	0.999 866
0.64	0.634 59	1.40	0.952 28	2.80	0.999 925
0.66	0.649 38	1.42	0.955 38	2.90	0.999 959
0.68	0.663 78	1.44	0.958 30	3.00	0.999 978
0.70	0.677 80	1.46	0.961 05	3.20	0.999 994
0.72	0.691 43	1.48	0.963 65	3.40	0.999 998
0.74	0.704 68	1.50	0.966 10	3.60	1.000 000

附录 11 常用法定计量单位及其换算

物理量名称	法定计量单位		非法定计量单位		单位换算
	单位名称	单位符号	单位名称	单位符号	
长度	米	m	费密		1 费密=1 fm=10^{-15} m
	海里	n mile	埃	Å	1Å=0.1 nm=10^{-10} m
			码	yd	1 yd=0.914 4 m
			[市](里)		1 里=500 m
			丈		1 丈=(10/3)m=$3.\dot{3}$ m
			尺		1 尺=(1/3)m=$0.3\dot{3}$ m
			寸		1 寸=(1/30)m=$0.03\dot{3}$ m
			[市]分		1 分=(1/300)m=$0.00\dot{3}$ m
			英尺	ft	1 ft=0.304 8 m
			英寸	in	1 in=0.025 4 m
			英里	mile	1 mile=1 609.344 m
			密耳	mil	1 mil=25.4×10^{6} m
面积	平方米	m^2	公亩	a	1 a=100 m^2
	公顷	$hm^2$①	平方英尺	ft^2	1 ft^2=0.092 903 0 m^2
			平方英寸	in^2	1 in^2=$6.451\,6\times10^{-4}$ m^2
			平方英里	$mile^2$	1 $mile^2$=$2.589\,99\times10^{6}$ m^2
面积	平方米	m^2	平方码	yd^2	1 yd^2=0.836 127 m^2
	公顷	hm^2	英亩	acre	1 acre=4 046.856 m^2
			亩		1 亩=10 000/15 m^2=666.6 m^2
体积	立方米	m^3	立方英尺	ft^3	1 ft^3=0.028 316 8 m^3
	升	L，(l)	立方英寸	in^3	1 in^3=$1.638\,71\times10^{-5}$ m^3
			立方码	yd^3	1 yd^3=0.764 554 9 m^3
			英加仑	UKgal	1 UKgal=4.546 09 dm^3
			美加仑	USgal	1 USgal=3.785 41 dm^3
			英品脱	UKpt	1 UKpt=0.568 261 dm^3
			美液品脱	USliqpt	1 USliqpt=0.473 176 5 dm^3
			美干品脱	USdrypt	1 USdrypt=0.550 610 5 dm^3
			美桶(用于石油)		1 美桶=158.987 3 dm^3
			英液盎司	UKfloz	1 UKfloz=28.413 06 cm^3
			美液盎司	USfloz	1 USfloz=29.573 53 cm^3

(续表)

物理量名称	法定计量单位		非法定计量单位		单位换算
	单位名称	单位符号	单位名称	单位符号	
速度	米每秒	m/s	英尺每秒	ft/s	1 ft/s=0.304 8 m/s
			英里每[小]时	mile/h	1mile/h=0.447 04 m/s
加速度	米每二次方秒	m/s^2	英尺每二次方秒	ft/s^2	1 ft/s^2=0.304 8 m/s^2
			伽	Gal	1 Gal=0.01 m/s^2
质量	千克(公斤)	kg	磅	lb	1 lb=0.453 592 37 kg
	吨	t	英担	cwt	1 cwt=50.802 3kg
	原子质量单位	u	英吨	ton	1 ton=1 016.05 kg
			短吨	sh ton	1 sh ton=907.185 kg
			盎司	oz	1 oz=28.349 5 g
			格令	gr	1 gr=0.064 798 91 g
			夸特	qr, qtr	1 qr=12.700 6 kg
			[米制]克拉		1 米制克拉=2×10^{-4} kg
体积质量	千克每立方米	kg/m^3	磅每立方英尺	lb/ft^3	1 lb/ft^3=16.018 5 kg/m^3
[质量]密度	吨每立方米	t/m^3	磅每立方英寸	lb/in^3	1 lb/in^3=27 679.9 kg/m^3
	千克每升	kg/L	盎司每立方英寸	oz/in^3	1 oz/in^3=1 729.99 kg/m^3
质量体积	立方米每千克	m^3/kg	立方英尺每磅	ft^3/lb	1 ft^3/lb=0.062 428 0 m^3/kg
比体积			立方英寸每磅	in^3/lb	1 in^3/lb=$3.612\ 73\times10^{-5}$ m^3/kg
线质量	千克每米	kg/m	旦[尼尔]	den	1 den=$0.111\ 112\times10^{-6}$ kg/m
线密度	特[克斯]	tex	磅每英尺	lb/ft	1 lb/ft=1.488 16 kg/m
			磅每英寸	lb/in	1 lb/in=17.858 0 kg/m
			磅每码	lb/yd	1 lb/yd=0.496 055 kg/m
转动惯量	千克二次方米	$kg\cdot m^2$	磅二次方英尺	$lb\cdot ft^2$	1 $lb\cdot ft^2$=0.042 140 1 $kg\cdot m^2$
			磅二次方英寸	$lb\cdot in^2$	1 $lb\cdot in^2$=$2.926\ 40\times10^{-4}$ $kg\cdot m^2$
			盎司二次方英寸	$oz\cdot in^2$	1 $oz\cdot in^2$=$1.829\ 00\times10^{-5}$ $kg\cdot m^2$
动量	千克米每秒	kg·m/s	磅英尺每秒	lb·ft/s	1 lb·ft/s=0.138 255 kg·m/s
			达因秒	dyn·s	1 dyn·s=10^{-5} kg·m/s
力	牛[顿]	N	达因	dyn	1 dyn=10^{-5}N
			千克力	kgf	1 kgf=9.806 65 N
			磅力	lbf	1 lbf=4.448 22 N
			吨力	tf	1 tf=$9.806\ 65\times10^3$N
			盎司力	ozf	1 ozf=0.278 014 N
			磅达	pdl	1 pdl=0.138 255 N
动量矩 角动量	千克二次方米每秒	$kg\cdot m^2/s$	磅二次方英尺每秒	$lb\cdot ft^2/s$	1 $lb\cdot ft^2/s$=0.042 140 1 $kg\cdot m^2/s$
力矩	牛[顿]米	N·m	千克力米	kgf·m	1 kgf·m=9.806 65 N·m
力偶矩			磅力英尺	lbf·ft	1 lbf·ft=1.355 82 N·m
转矩			磅力英寸	lbf·in	1 lbf·in=0.112 985 N·m
			达因厘米	dyn·cm	1 dyn·cm=10^{-7} N·m
			盎司力英寸	ozf·in	1 ozf·in=$7.061\ 55\times10^{-3}$N·m
压力	帕[斯卡]	Pa	达因每平方厘米	dyn/cm^2	1 dyn/cm^2=0.1 Pa
压强			英寸汞柱	inHg	1 inHg=3 386.39 Pa
正应力			英寸水柱	inH_2O	1 inH_2O=249.082 Pa
切应力			巴	bar	1 bar=10^5 Pa

（续表）

物理量名称	法定计量单位		非法定计量单位		单位换算
	单位名称	单位符号	单位名称	单位符号	
压力 压强 正应力 切应力			千克力每平方厘米	kgf/cm²	1 kgf/cm² = 0.098 066 5 MPa
			毫米水柱	mmH_2O	1 mmH_2O = 9.806 65 Pa
			毫米汞柱	mmHg	1 mmHg = 133.322 Pa
			托	Torr	1 Torr = 133.322 Pa
			工程大气压	at	1 at = 98 066.5 Pa = 98.0665 kPa
			标准大气压	atm	1 atm = 101 325 Pa = 101.325 kPa
			磅力每平方英尺	lbf/ft²	1 lbf/ft² = 47.880 3 Pa
			磅力每平方英寸	lbf/in²	1 lbf/in² = 6 894.76 Pa = 6.894 76 kPa
[动力]粘度	帕[斯卡]秒	Pa·s	泊	P, Po	1 P = 10^{-1} Pa·s
			厘泊	cP	1 cP = 10^{-3} Pa·s
			千克力秒每平方米	kgf·s/m²	1 kgf·s/m² = 9.806 65 Pa·s
			磅力秒每平方英尺	lbf·s/ft²	1 lbf·s/ft² = 47.880 3 Pa·s
			磅力秒每平方英寸	lbf·s/in²	1 lbf·s/in² = 6 894.76 Pa·s
运动粘度	二次方米每秒	m²/s	斯[托克斯]	St	1 St = 10^4 m²/s
			厘斯[托克斯]	cSt	1 cSt = 10^{-6} m²/s
			二次方英尺每秒	ft²/s	1 ft²/s = 9.290 30 × 10^{-2} m²/s
			二次方英寸每秒	in²/s	1 in²/s = 6.451 6 × 10^{-4} m²/s
能[量] 功 热	焦[耳] 电子伏	J eV	尔格	erg	1 erg = 10^{-7} J
			千克力米	kgf·m	1 kgf·m = 9.806 65 J
			英马力[小]时	hp·h	1 hp·h = 2.684 52 MJ
			卡	cal	1 cal = 4.186 8J
			热化学卡	cal_{th}	1cal_{th} = 4.184 0 J
			马力[小]时		1 马车·时 = 2.647 79 MJ
			电工马力[小]时		1 电工马力·时 = 2.685 60 MJ
			英热单位	Btu	1 Btu = 1 055.06 J = 1.055 06 KJ
			吨标准煤，吨当量煤	tec	1 tec = 29.307 6GJ
			英尺磅力	ft·lbf	1 ft·lbf = 1.355 82J
功率	瓦[特]	W	千克力米每秒	kgf·m/s	1 kgf·m/s = 9.806 65 W
			马力·[米制]马力	法 ch，CV；德 PS	1 马力 = 735.499 W
			英马力	hp	1 hp = 745.700 W
			电工马力		1 电工马力 = 746 W
			卡每秒	cal/s	1 cal/s = 4.186 8W
			千卡每[小]时	kcal/h	1 kcal/h = 1.163 W
			热化学卡每秒	cal_{th}/s	1 $cal_{th/s}$ = 4.184 W
			英尺磅力每秒	ft·lbf/s	1 ft·lbf/s = 1.355 82 W
			尔格每秒	erg/s	1 erg/s = 10^{-7} W
质量流量	千克每秒	kg/s	磅每秒	lb/s	1 lb/s = 0.453 592 kg/s
			磅每[小]时	lb/h	1 lb/h = 1.259 98 × 10^{-4} kg/s
体积流量	立方米每秒	m³/s	立方英尺每秒	ft³/s	1 ft³/s = 0.028 316 8 m³/s

（续表）

物理量名称	法定计量单位		非法定计量单位		单位换算
	单位名称	单位符号	单位名称	单位符号	
体积流量	升每秒	L/s	立方英寸每[小]时	in^3/h	$1\,in^3/h=4.55196\times10^{-6}\,L/s$
热力学温度 摄氏温度	开[尔文] 摄氏度	K ℃	华氏度	℉	表示温度差和温度间隔时： 1℃=1K 表示温度数值时： $\frac{t}{℃}^{②}=\frac{T}{K}^{②}-273.15$ 表示温度差和温度间隔时： $1℉=\frac{5}{9}K$ 表示温度数值时： $\frac{T}{K}=\frac{5}{9}(\frac{\theta}{℉}^{②}+459.67)$ $\frac{t}{℃}=\frac{5}{9}(\frac{\theta}{℉}-32)$
热力学温度 摄氏温度	开[尔文] 摄氏度	K ℃	兰氏度	°R	表示温度差和温度间隔时： $1°R=\frac{5}{9}K$ 表示温度数值时：$\frac{T}{K}=\frac{5}{9}\frac{\Theta}{°R}$ $\frac{t}{℃}=\frac{5}{9}(\frac{\Theta}{°R}^{②}-491.67)$
热导率 （导热系数）	瓦[特]每米开[尔文]	W/(m·K)	卡每厘米秒开[尔文]	cal/(cm·s·K)	1 cal/(cm·s·K)=418.68 W/(m·K)
			千卡每米[小]时开[尔文]	kcal(m·h·K)	1 kcal/(m·h·K)=1.163 W/(m·K)
			英热单位每英尺[小]时华氏度	Btu/(ft·h·℉)	1Btu/(ft·h·℉)=1.73073 W/(m·K)
传热系数 表面传热系数	瓦[特]每平方米开[尔文]	$W/(m^2·K)$	卡每平方厘米秒开[尔文]	$cal/(cm^2·s·K)$	$1\,cal/(cm^2·s·K)=41868\,W/(m^2·K)$
传热系数 表面传热系数	瓦[特]每平方米开[尔文]	$W/(m^2·K)$	千卡每平方米[小]时开[尔文]	$kcal/(m^2·h·K)$	$1\,kcal/(m^2·h·K)=1.163\,W/(m^2·K)$
			英热单位每平方英尺[小]时华氏度	$Btu/(ft^2·h·℉)$	$1\,Btu/(ft^2·h·℉)=5.67826\,W/(m^2·K)$
			尔格每平方厘米秒开[尔文]	$erg/(cm^2·s·K)$	$1\,erg/(cm^2·s·K)=0.001W/(m^2·K)$
热容 熵	焦[耳]每开[尔文]	J/K	克劳	Cl	1 Cl=4.1868 J/K
质量热容 比热容， 比熵	焦[耳]每千克开[尔文]	J/(kg·K)	千卡每千克开[尔文]	kcal/(kg·K)	1 kcal/(kg·K)=4186.8 J/(kg·K)

（续表）

物理量名称	法定计量单位		非法定计量单位		单位换算
	单位名称	单位符号	单位名称	单位符号	
质量热容 比热熔， 比熵	焦[耳]每千克开[尔文]	J/(kg·K)	热化学千卡每千克开[尔文]	$kcal_{th}$/(kg·K)	1 $kcal_{th}$(kg·K)=4 184 J/(kg·K)
比熵			英热单位每磅华氏度	Btu/(lb·°F)	1 Btu/(lb·°F)=4 186.8 J/(kg·K)
			英热单位每磅兰氏度	Btu/(lb·°R)	1 Btu/(lb·°R)=4 186·8 J/(kg·K)
			尔格每克开[尔文]	erg/(g·K)	1 erg/(g·K)=10^{-4} J/(kg·K)
质量能	焦[耳]每千克	J/kg	千卡每千克	kcal/kg	1 kcal/kg=4 186.8 J/kg
比能			热化学千卡每千克	$kcal_{th}$/kg	1 $kcal_{th}$/kg=4 184 J/kg
质量焓			英热单位每磅	Btu/lb	1 Btu/lb=2 326 J/kg
比焓			尔格每克	erg/g	1 erg/g=10^{-4} J/kg
磁场强度	安[培]每米	A/m	奥斯特	Oe	1 Oe=79.577 5 A/m
磁通[量]密度磁感应强度	特[斯拉]	T	高斯	Gs, G	1 Gs=10^{-4} T
磁通[量]	韦[伯]	Wb	麦克斯韦	Mx	1 Mx=10^{-8} Wb
电导	西[门子]	S	姆欧	Ω	1Ω=1 S
[光]亮度	坎[德拉]每平方米	cd/m^2	尼特	nt	1 nt=1 cd/m^2
[光]照度	勒[克斯]	lx	辐透 英尺烛光	ph fc	1 ph=10^4 lx 1 fc=10.764 lx

① 1 hm^2=10^4 m^2，公顷的国际通用符号为 ha。

② T、t、Θ、θ 分别表示热力学温度、摄氏温度、兰氏温度和华氏温度。

参考文献

[1] 杨世铭，陶文铨编著．传热学[M]．第三版，北京：高等教育出版社，2000.

[2] J. P. Holman, HeatTransfer[M]. 9th ed. New York: McGraw-Hill, 2002.

[3] 周光炯等编著．流体力学（上、下册）[M]．第二版，北京：高等教育出版社，2005.

[4] 过增元编．热流体学[M]．北京：清华大学出版社，1992.

[5] 李国钧，湛柏琼主编．工程流体力学[M]．武汉：华中理工大学出版社，1991.

[6] J. R. 威尔蒂著．工程传热学[M]．任泽霈，罗棣庵等译．北京：人民教育出版社，1983.

[7] A. F. Mills. Heat Transfer[M]. Illinois: Richard D. Irwin, Inc, 1992.

[8] 奚同康．无机材料热物性学[M]．上海：上海人民出版社，1981.

[9] 埃克特 E R G，德雷克 R M．传热与传质分析[M]．航青译．北京：科学出版社，1983.

[10] 杨世铭编著．传热学基础[M]．第二版，北京：高等教育出版社，2003.

[11] Touloukian Y S, et al. Thermophysical properties of mater[M]. New York: IFI/Plenum Press, 1970.

[12] Vargaftik N B. Tables on the thermophysical properties of liquids and gases[M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons Inc, 1975.

[13] 因克罗普拉 F P，德威特 D P 著．传热基础[M]．陆大有，于广经，朱谷君等译．北京：宇航出版社，1987.

[14] 斯帕罗 E M，塞斯 R D 著．辐射传热[M]．顾传保，张学学译．北京：高等教育出版社，1982.

[15] Siegel R. Howell J R. Thermal radiation heat transfer[M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1981.

[16] 葛绍岩，那鸿悦编著．热辐射性质及其测量[M]．北京：科学出版社，1989.

[17] 杨贤荣，马庆芳等编．辐射换热角系数手册[M]．北京：国防工业出版社，1982.

[18] 罗森诺 W. M 等主编．传热学手册[M]．李荫亭等译．北京：科学出版社，1985.

[19] 李庆春主编．铸件形成理论基础[M]．北京：机械工业出版社，1982.

[20] L. 普朗特等著．流体力学概论[M]．郭永怀等译．北京：科学出版社，1981.

[21] G. 巴契勒著．流体动力学引论[M]．沈青，贾复译．北京：科学出版社，1997.

[22] Fox R W, et al. Introduction to Fluid Mechanics[M]. 4th ed. New York: John Wiley & Sons Inc, 1992.